Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

6 mai 2013 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 8 questions obligatoires et de 4 questions à choisir parmi les questions numérotées de 9 à 16.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

---

1. Les raisonnements suivants sont corrects :

(A) Tous les élèves s'appellent Bob. Or certains Bob ne sont pas doués. Donc certains élèves sont doués.

(B) Tous les élèves doués s'appellent Bob. Or Bob n'est pas doué. Donc Bob n'est pas un élève.

(C) La plupart des Bob ne sont pas doués. Or tous les élèves sont doués. Donc aucun élève ne s'appelle Bob.

(D) La plupart des élèves s'appellent Bob. Or tous les Bob sont doués. Donc certains élèves sont doués.

(E) Bob est doué. Or tous les élèves sont doués. Donc Bob est un élève.

---

2. La fonction f admet f' comme fonction dérivée sur son ensemble de définition

(A) $f(x) = \sin^2 x \qquad f'(x) = 2\cos x$

(B) $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

(C) $f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(D) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+5} \qquad f'(x) = -\dfrac{2}{(x+5)^2}$

(E) $f(x) = x\mathrm{e}^x \qquad f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$

3. Sachant que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $2t^2 - t - 15 = (2t+5)(t-3)$, on peut en déduire que l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

(A) $2(\ln x)^2 - \ln x - 15 = 0$ admet exactement deux solutions

(B) $2\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x} - 15 = 0$ admet une unique solution

(C) $\ln(x - l) + \ln(3x+2) = \ln\left(x^2 + 13\right)$ admet une unique solution

(D) $2(\ln x - \ln x - 15 = 2(\ln x - 3)$ admet exactement deux solutions

(E) $2\mathrm{e}^{2x} - 7\mathrm{e}^{x} + 3 = 0$ admet exactement deux solutions

---

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.
On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Alors :

(A) C est symétrique par rapport à O

(B) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(-x) = f'(x)$

(C) Il existe un unique $a \in \mathbb{R}$, $f'(a) = 0$

(D) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

(E) Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f(x) \leqslant x$

---

5. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
Alors :

(A) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

(B) $f'(4) = 0$

(C) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$

(D) L'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $]0\,;\,+\infty[$

(E) La courbe de f admet une asymptote verticale

---

6. Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$. Alors :

(A) La courbe de f admet une asymptote horizontale

(B) Pour tout $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

(C) f est décroissante sur $]-1\,;\,+\infty[$

(D) $f(1) - 1 < 0$

(E) Il existe $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) - x = 0$

7. Soit $I=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

On a :

(A) $I=\dfrac{8}{3}$

(B) $I=-\ln\sqrt{3}$

(C) $J=\ln\sqrt{3}$

(D) $I+J=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

(E) $I+J=\ln 3$

---

8. On place un capital u_0 qui produit des intérêts s'ajoutant, chaque année, au capital précédent. On suppose que le taux d'intérêt est de 10 % et qu'on ne prend ni ne remet d'argent sur ce compte. u_n désigne la valeur du capital disponible au bout de n années.

On donne $\log 2 = 0,301$ et $\log(1,1) = 0,041$.

Alors :

(A) Pour tout $n \in N,\ u_{n+1}=\dfrac{1}{10}u_n$.

(B) $u_3 = u_0 + \left(\dfrac{1}{10}\right)u_0$

(C) (u_n) est croissante

(D) Il faut 8 années pour au moins doubler le capital

(E) Il faut 16 années pour au moins quadrupler le capital

Questions à choisir (4 questions à choisir parmi les suivantes)

---

9. Pour toute suite réelle (u_n)

(A) Si (u_n) n'est pas majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

(B) Si (u_n) est croissante et majorée par 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

(C) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang

(D) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors (u_n) est positive à partir d'un certain rang

(E) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n+u_{n+1}}{2} = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

10. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x} + 3$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

Alors :

(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

(C) f est croissante sur $\mathbb{R}$

(D) La tangente à C au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation $y = 3 - \mathrm{e}^{-2x}$

(E) $f'(0)f'(2) < 0$

11.] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

Alors :

(A) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

(B) f est périodique de période π

(C) f est décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{3}~;~\pi\right]$

(D) f est croissante sur $\left[0~;~\dfrac{\pi}{3}\right]$

(E) Pour tout $x \in [0~;~\pi]$, $f(x) \leqslant \dfrac{5}{4}$

---

12. Deux laboratoires proposent chacun leur vaccin contre la grippe. On sait qu'un quart de la population a utilisé le vaccin 1 et un sixième le vaccin 2. Il n'est pas possible pour un individu d'être vacciné deux fois. L'épidémie ayant eu lieu, on constate que 1 % des malades ont utilisé le vaccin 1 et 0,6 % le vaccin 2.

On choisit au hasard un individu dans la population, on note M = « l'individu est malade », I = « l'individu a reçu le vaccin 1 », II = « l'individu a reçu le vaccin 2 ».

On a :

(A) La probabilité que l'individu soit vacciné est $P(I) + P(II)$

(B) Les données ne permettent pas de calculer $P_{\overline{I}}(M)$

(C) $p(I) = \dfrac{1}{100}$

(D) $P_M\left(\overline{II}\right) = 0,94$

(E) $\dfrac{P_{\overline{H}}(M)}{P_H(M)} = \dfrac{P_M\left(\overline{H}\right)P(H)}{P_M(H)P\left(\overline{H}\right)}$

13. Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, sur la deuxième 1 vert et 9 blancs. Les gains, représentés par la variable aléatoire X, sont les suivants :

5 euros si les deux roues tombent sur rouge et vert

2 euros si une seule des deux roues tombe sur blanc

1 euro si les deux roues tombent sur blanc

Alors :

(A) $P(X=2)=\dfrac{17}{50}$
(B) $P(X\geqslant 2)=\dfrac{37}{50}$
(C) Si la mise est de 2 euros, la probabilité que le joueur soit bénéficiaire est

(D) Si la mise est de 2,50 euros alors le bénéfice moyen par partie du forain est supérieur à 1 euro

(E) Si le forain veut un bénéfice moyen par partie d'au moins 60 centimes alors il doit demander une mise de 2 euros

---

14. On considère les nombres complexes $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ et $z'=\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$

Alors :

(A) $z'=\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$
(B) $zz'=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
(C) $zz'=\mathrm{e}^{13\mathrm{i}\pi/12}$
(D) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
(E) $\tan\dfrac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

---

15. Soit le nombre complexe $z=1+\mathrm{i}$, alors :
(A) $\dfrac{z^3}{\overline{z}}=\dfrac{1}{2}z^4$
(B) $\dfrac{\overline{z}}{z^3\overline{z}}\in\mathbb{R}$
(C) $\dfrac{\overline{z}^4}{z^2}$ est imaginaire pur
(D) Il existe $n\in\mathbb{N}$, z^n est un réel strictement négatif
(E) Il existe $n\in\mathbb{N}$, $\arg(z^n)=-\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

16. Soit I, J et K trois points du plan tels que $IJ = 3 \quad IK = 2$ et $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$.

Soit L et M les points du plan définis par : $\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{IJ} - 3\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IJ} + 4\overrightarrow{IK}$.

Alors :

(A) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IK} = 3$

(B) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IL} = 30$

(C) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IM} = -33$

(D) $\cos\left(\widehat{LIM}\right) = -\dfrac{11}{14}$

(E) Une mesure de $\widehat{LIM}$ appartient à $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$