Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

4 mai 2019 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

1. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$.

c. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = 0$.

d. Si $2\ln(a)+1>0$ alors $a>\sqrt{e}$.

e. Sur $]0\,;\,+\infty[$, la dérivée de la fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est la fonction $x \longmapsto \ln(x)$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'origine O.
Pour tout point M du plan, l'affixe de M est noté z_M. A, B et C désignent trois points du plan distincts de O.

a. Si $Z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{6}}$ alors $|Z| = \dfrac{1}{2}$ et $\arg(Z) = \dfrac{7\pi}{12}$ $[2\pi]$.

b. Si $Z = -2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$ alors $|Z| = 2$ et $\arg(Z) = -\dfrac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

c. Si les points A et B sont symétriques par rapport à O alors $Z_A = \overline{Z_B}$.

d. Si $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C|$ alors ABC est un triangle équilatéral.

e. Si $\arg(Z_A) = \pi + \arg(Z_B)$ $[2\pi]$ alors O, A et B sont alignés.

3. f est une fonction définie et dérivable sur un ensemble D.

a. Si $D = \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+1}$ alors $f'(x) = \dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

b. Si $D = \mathbb{R}*$ et $f(x) = \left(x^2-x\right)e^{1/x}$ alors $f'(x) = e^{1/x}\left(\dfrac{2x^2-2x+1}{x}\right)$.

c. Si $D = \mathbb{R}*$ et $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$.

e. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+\pi)\,\mathrm{d}x = 0$.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x}$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

Soit d la droite d'équation $y = \mathrm{e}x + 15$ et D la droite d'équation $y = x$.

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

c. Pour tout réel x, $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{1-x}$.

d. Il existe une tangente T à $\mathscr{C}_f$ qui est parallèle à la droite d.

e. $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite D sur $]-\infty\,;\,0[$.

5. Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x}$ représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

Soit h la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$, représentée par la courbe $\mathscr{C}'$.

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

b. Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = \dfrac{2\ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2}$.

c. Pour tout réel x strictement positif, $\dfrac{g(x)}{2} = \left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$.

d. $\mathscr{C}$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses.

e. $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\,+\infty\right[$.

6. Un magasin d'électroménager vend deux modèles de robot au même prix et de marques M_1 et M_2.

Les deux robots ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi le robot M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs 20 % des clients ayant acheté un robot M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des robots précédemment cités et on choisit un client au hasard.

Soient A et B deux évènements indépendants d'un même univers n tels que $P(A) = 0,3$ et $P(A \cup B) = 0,65$.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot M_2 de couleur noire est égale à $\dfrac{6}{25}$.

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un robot de couleur noire est égale à $\dfrac{6}{25}$.

c. Le client a choisi un robot de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est égale à $\dfrac{33}{50}$.

d. La probabilité de l'évènement B est égale à $0,5$.

e. A et B sont indépendants.

Questions à choisir

7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left((1-\mathrm{e}^x)^2\right)$ et $\mathscr{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthonormal du plan.

- **a.** Pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 0$.
- **b.** L'axe des abscisses est une asymptote de $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
- **c.** Pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 2\ln(1-\mathrm{e}^x)$.
- **d.** Pour tout $x \neq 0$, $(f(x) > 0$ si et seulement si $x < 0)$.
- **e.** f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

8. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + n - 2$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = -2u_n + 3n - \dfrac{21}{2}$.

On considère l'algorithme ci-dessous.

```
N est un entier, U est un réel
U ← 1; N ← 0;
Tant que (U ⩽ 0 ou N = 0)
        U ← U/3 + N − 2
        N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher U
```

- **a.** $u_3 = -\dfrac{14}{27}$.
- **b.** L'algorithme affiche la valeur de u_3.
- **c.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n \geqslant 5 \Rightarrow u_n \geqslant n-3)$.
- **d.** (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
- **e.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

9. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_{n+1}) = \ln(v_n) - 1$.

- **a.** Si pour tout réel x, $f'(x) < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.
- **b.** (v_n) est une suite géométrique.
- **c.** (v_n) est convergente.
- **d.** La suite (t_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \left(n^2 - 200\right) y\sqrt{n}$ est décroissante.
- **e.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = +\infty$

10. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

- **a.** Si pour tout réel $x > 1$, $1 + \dfrac{1}{x} < f(x) < \dfrac{x^2+x+100}{x^2+1}$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
- **b.** Si $f(x) = 2x + 3 - \sin(2x)$ alors pour tout réel x, $f(x) \leqslant 2x+2$.
- **c.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x\sin\left(\frac{1}{2x}\right) = 1$.
- **d.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3+2^n}{3+4^n} = 1$.

e. Si $0 < x < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[(1-x)^n(1+x)^n\right] = +\infty$.

11. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal d'origine 0, on considère les points E et F d'affixes respectives $-2+\text{i}$ et $2+4\text{i}$ et $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+2-\text{i}| = |z-2-4\text{i}|$.
Pour tout point M du plan, l'affixe de M est notée z_M.

a. Le point G d'affixe $3-2\text{i}$ appartient à $\mathscr{E}$.

b. $\mathscr{E}$ est le cercle de diamètre [EF].

c. Le triangle OEF est rectangle.

d. Si $z_{\text{A}} = 2-3\text{i}$, $z_{\text{B}} = -26+18\text{i}$ et $z_{\text{C}} = -2$, alors A, B et C sont alignés.

e. Si $z_{\text{A}} = 3\text{e}^{2\text{i}\pi/3}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{e}^{-5\text{i}\pi/6}$ alors le triangle OAB est rectangle.

12. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.
On considère les points suivants définis par leurs coordonnées : A(1 ; −1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(−3 ; 5 ; 4) et D(l ; 2 ; 3).

On note d la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+\ \ t \\ y &=& -1+2t \\ z &=& -2+3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

On note d' la droite ayant pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+k \\ y &=& 3+k \\ z &=& 4-k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{R}$.

On note P le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

a. Le point C appartient à la droite d.

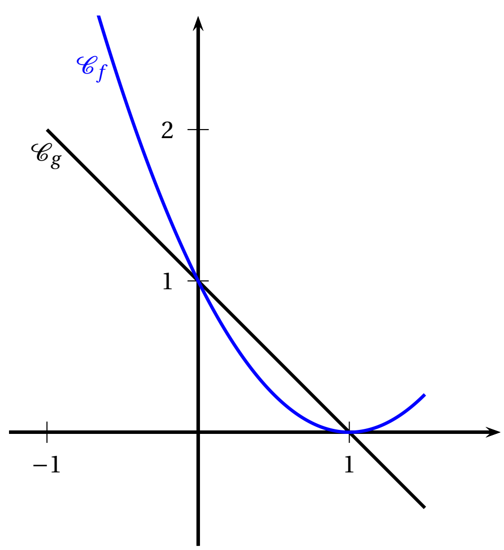
b. Les droites d et d' sont parallèles.

c. Le plan P contient la droite d et est orthogonal à la droite d'.

d. Le triangle BCD est rectangle.

e. On note P' le plan contenant la droite d' et le point A.
Un vecteur normal à ce plan est : $\vec{u}\,(3\,;\,-1\,;\,2)$.

13. On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = -x+1$ représentées graphiquement par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a. L'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ (pour $x \in [0\,;\,1]$) est égale à $\dfrac{1}{6}$.

b. $\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

e. $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) < \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x < \ln(2)$.

14. Le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $0,7$.

Marc se rend à son travail à pied ou en bus. Dans la ville où il habite, il pleut un jour sur quatre.
Lorsqu'il pleut, Marc se rend en bus à son travail dans 80 % des cas.

Lorsqu'il ne pleut pas, il se rend à pied à son travail dans 60 % des cas.

a. La probabilité qu'un client attende moins de 5 minutes à ce guichet est égale à $\dfrac{\mathrm{e}^{3,5}-1}{\mathrm{e}^{3,5}}$.

b. Sachant qu'un client attend depuis 5 minutes, la probabilité qu'il attende au total plus de 10 minutes à ce guichet est égale à $\mathrm{e}^{3,5}$.

c. Marc prend le bus un jour sur deux.

d. Soient A et B deux évènements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,7$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,1$.

Alors la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{89}$.

e. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et dont la loi de probabilité admet comme densité la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$.
Alors $P(l \leqslant X \leqslant 4) = 16$.

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE L'ÉPREUVE MATHÉMATIQUES

(V)rai ou (F)aux

Nº	A	B	C	D	E
1	V	V	F	F	F
2	V	F	F	F	V
3	V	V	F	F	F
4	F	V	V	V	V
5	F	V	F	V	F
6	V	F	F	V	V
7	F	V	F	F	V
8	V	F	V	F	V
9	F	V	V	F	F
10	V	F	V	F	F
11	V	F	V	V	V
12	F	F	F	V	V
13	V	F	V	V	V
14	V	V	V	F	V