Concours Accès 14 avril 2016

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Exercices n° 1 à 6 : Raisonnement logique

1. x collègues se rendent ensemble au restaurant. Chacun verse 20 €. Étant en groupe, ils bénéficient d'une réduction de 20 % sur l'addition. Lorsque la facture arrive, ils se rendent compte qu'il manque y €.
Chacun ajoute 3 € à la somme de départ. Ils paient et le serveur rend z € au groupe.
À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. $23x + z = 20x + y$

B. Le groupe est composé de $\dfrac{y-z}{3}$ personnes.

C. Le prix par personne est de $23 - \dfrac{z}{x}$ €

D. Le prix par personne sans la réduction octroyée était de $25 + \dfrac{y}{0,8x}$ €.

2. 3 collègues se rendent à leur entreprise. Noémie, Xavier et Yves utilisent 3 moyens de transport différents (Bus, Vélo ou à pied). Ils parcourent 3 distances différentes (2, 4 et 6 km). Xavier, qui parcourt plus de 4 km, ne se rend pas à pied à l'entreprise. La personne qui est à 2 km de l'entreprise et qui s'y rend à vélo n'est pas Yves.
À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Yves parcourt 6 km.

B. Celui qui roule à vélo parcourt plus de kilomètres que celui qui se rend à pied à l'entreprise.

C. Noémie n'utilise pas le bus pour se rendre à l'entreprise.

D. Celui qui vient en bus parcourt le plus de kilomètres.

3. Si l'on considère vraie l'hypothèse « Pour réussir, il faut travailler dur », on peut conclure que :

A. Tous ceux qui réussissent travaillent dur.

B. Ceux qui ne réussissent pas ne travaillent pas dur.

C. Les gens qui travaillent dur réussissent toujours.

D. Ceux qui ne travaillent pas dur ne peuvent pas réussir.

4. Dans un pays, une étude sur la fécondité a été réalisée en interviewant 1 000 femmes. En voici les résultats :

- 20 % de ces femmes n'ont pas d'enfant.
- 25 % de ces femmes ont 1 enfant.
- 25 % de ces femmes ont 2 enfants.
- 15 % de ces femmes ont 3 enfants.
- 10 % de ces femmes ont 4 enfants.
- 5 % de ces femmes ont plus de 4 enfants.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Parmi les femmes ayant un ou plusieurs enfants, 50 % d'entre elles ont moins de 3 enfants.

B. Ces 1 000 femmes ont donné naissance à plus de 1 800 enfants.

C. Si on choisit au hasard une de ces 1 000 femmes, la probabilité qu'elle ait au moins 3 enfants est de 30 %.

D. 55 % des enfants de ces femmes ont au moins un frère ou une soeur.

5. Arthur, Basile, Charly et Démosthène sont soupçonnés d'avoir commis un méfait. Nous avons, à leur sujet, les informations suivantes :

- Si Arthur est innocent alors Démosthène est coupable.
- Si Arthur est coupable alors Charly l'est aussi.
- Si Démosthène est coupable alors Basile l'est aussi.
- Basile est innocent.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Arthur est coupable.

B. Démosthène est non coupable.

C. Arthur et Démosthène sont coupables.

D. Charly est non coupable.

6. Dans un magasin animalier spécialisé on trouve 2 catégories de perroquets : des perroquets aux plumes blanches et des perroquets aux plumes jaunes. Certains ont le bec blanc, d'autres ont le bec noir. Au total, il y a 200 perroquets. 30 % ont des plumes blanches et 45 % ont le bec blanc. On sait que le nombre de perroquets aux plumes blanches et au bec blanc est un nombre positif et multiple de 19.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Il y a 110 perroquets au bec noir.

B. Il y a 140 perroquets aux plumes jaunes.

C. Le nombre de perroquets aux plumes blanches et au bec blanc est égal à 38.

D. Le nombre de perroquets aux plumes jaunes et au bec blanc est égal à 52 ou à 71.

Exercices n° 7 à 12 : Raisonnement mathématique

7. Soit f la fonction définie pour tout x de D par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)$.

Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, I,J).

A. $D =]-\infty~;~-3[\cup]1~;~+\infty[$

B. $\mathscr{C}_f$ coupe la droite d'équation $y = 1$ en un seul point d'abscisse négative.

C. f est strictement croissante sur $]1~;~+\infty[$.

D. L'axe des abscisses est une asymptote à Cf'

8. Soit f la fonction définie pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln^2(x) + \ln(x)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction [dans un repère orthogonal (O, I, J).
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points : A d'abscisse 1 et B d'abscisse x_{B}.

A. Le minimum de la fonction f est $\dfrac{-1}{4}$

B. $x_{\text{B}} > 1$

C. La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à la droite d'équation $y = \text{e} - \text{e}^x$.

D. La fonction F définie pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ par
$F(x) = x\left(\ln^2(x)\right) - x\ln(x) - x$ est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

9. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d quatre réels. Soit $\mathscr{C}_f$ La courbe représentative de la fonction f qui admet aux points A(1 ; 2) et B(0 ; -3) deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = x$.

A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + x - 3$.

B. Sur $]-\infty\ ;\ 0]$, la fonction f a pour maximum $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{42}}{12}$.

C. La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

D. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

10. Soit f la fonction définie pour tout x de D par $f(x) = \dfrac{x-1}{x}\ln(x)$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.
Soit g la fonction définie pour tout x de D par $g(x) = x - 1 + \ln(x)$.

A. g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

B. g est convexe sur D.

C. Pour tout x de D, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

D. $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de Γ, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

11. Soit f la fonction définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^x - \text{e}^{-x} + 2$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J).
Soit $\Omega(0\ ;\ 2)$ et Q le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\ln(2)$.

A. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point Q a pour coefficient directeur $\dfrac{7}{2}$.

B. $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points.

C. $\mathscr{C}_f$ admet Ω comme unique point d'inflexion.

D. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\text{d}x = \frac{\text{e}^2 - 1}{\text{e}}$.

12. On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires ($n > 0$).

U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

Soit A l'évènement « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

Soit B l'évènement « après l'épreuve l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».

Un joueur mise 20 € et effectue une épreuve.

À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans l'urne U_2 :

— Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ €
— Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n €
— Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

Soit X_n la variable aléatoire qui prend pour valeurs les gains algébriques (gains moins mises) du joueur.

A. $P(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

B. $P(B) = \frac{6}{4(n+2)}$.

C. L'espérance de X_n est $E\left(X_n\right) = \frac{3n^2 - 62n - 230}{4n+12}$.

D. Le jeu est favorable au joueur (l'espérance est positive pour le joueur) pour $n \geqslant 20$.

Exercices n° 13 à 18 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres peuvent nécessiter les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Une entreprise s'interroge sur les coûts de gestion liés à certains de ses produits et sur la possibilité de promouvoir et d'élargir cette gamme de produits. Pour cela, elle vous demande de réaliser différentes études.

13. Cette entreprise achète régulièrement un article à 10 euros l'unité. Elle en utilise 10 par jour, 250jours par an. Cette entreprise recherche la quantité (notée Q) par commande qui lui permette de minimiser le coût de son stock sur une année (250 jours). Ce dernier (noté $C_T(Q)$ est égal à la somme de trois composantes :

- le coût d'achat des marchandises
- le coût des commandes
- le coût de stockage des marchandises qui est égal à $0,20Q$

Le nombre de commandes dans l'année est noté N et le coût de chaque commande est égal à 20 €.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. $N = \frac{2\,500}{Q}$

B. $C_T(Q) = 25\,000 + \frac{50000}{Q} + 0,2Q$

C. C_T est minimal si $Q = 600$ unités

D. Le coût minimal du stock est égal à 25 200 €.

14. Cette entreprise souhaite étudier le coût de fabrication de l'un de ses produits (noté P). Le coût de la matière première pour fabriquer ce produit, par jour de production, est égal à $C_m(x)$ où x désigne les quantités produites.

On sait que $C_m(x)$ s'écrit sous la forme $ax2 + bx$ (où a et b désignent deux réels).

On dispose des données suivantes :

x	$C_m(x)$ en euros
1	3
2	8

Le directeur de l'entreprise constate qu'il paie chaque jour indépendamment du niveau de sa production 1 000 € de frais fixes. Par contre, chaque fois qu'il fabrique une unité de produit P, il récupère des déchets qu'il peut revendre 10 €. On appelle $C(x)$ le coût total en euros.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. $a = 1$ et $b = 2$

B. $C(x) = x^2 - 10x + 1\,000$

C. Si $x = 2$, $C(x) = 988$ (€).

D. La valeur de x qui donne un coût total égal à 1 048 € est supérieure à 10.

15. Pour promouvoir le produit P, une action publicitaire est réalisée par le biais de deux supports : la télévision et la presse locale. On sait que :

- 18 % des consommateurs potentiels ont vu la publicité à la télévision
- 12 % des consommateurs potentiels ont vu la publicité dans la presse locale
- 10 % des consommateurs potentiels ont vu la publicité dans les deux supports
- 4 consommateurs potentiels sur 10 achètent le produit parmi ceux qui ont vu la publicité
- 1 consommateur potentiel sur 10 achète le produit parmi ceux qui n'ont pas vu la publicité

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. La probabilité pour qu'un consommateur potentiel ait vu la publicité est égale à $0,4$.

B. La probabilité pour qu'un consommateur potentiel achète le produit est égale à $0,5$.

C. La probabilité pour qu'un consommateur potentiel ne voit pas la publicité et achète le produit est égale à $0,08$.

D. La probabilité pour qu'un consommateur qui a acheté le produit soit atteint par la publicité est égale à $0,5$.

16. L'entreprise souhaite développer sa gamme de produits. Dans l'un de ses ateliers, elle peut fabriquer deux produits nouveaux P_1 et P_2 sur une machine qui est utilisée 100 heures par mois. Les deux types de produits ne peuvent être fabriqués simultanément. 50 unités de P_1 ou 25 unités de P_2 peuvent être réalisés à l'heure. En raison de prix dégressifs consentis aux clients, le prix de chaque article décroit avec la quantité vendue.

Ainsi le prix de vente unitaire du produit P_1 est égal à $(200 - 0,02x)$ euros lorsque l'on en vend x unités par mois et le prix de vente unitaire du produit P_2 est égal à $(100 - 0,01y)$ euros lorsque l'on en vend y unités par mois.

Tous les produits fabriqués sont vendus. Le chiffre d'affaires est égal au prix de vente unitaire multiplié par les quantités vendues.
À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. Si l'on vend 1 000 unités de P_1, le chiffre d'affaires mensuel relatif à ce produit est égal à 180 000 €.
B. $\dfrac{x}{50}+\dfrac{y}{25}=100$
C. Le chiffre d'affaires mensuel pour les deux produits est égal à $500\,000+300y-0,09y^2$.
D. Si $x=3\,000$ unités, le chiffre d'affaires mensuel pour les deux produits est égal à 500 000 €.

17. L'essor commercial de cette entreprise est actuellement freiné par sa capacité de production.
L'achat d'une nouvelle chaîne (pour fabriquer le produit P_3) est programmé. Son prix d'achat est égal à 500 000 €.
La demande est telle que l'on doit produire 30 000 unités de produit P_3 par an.
On dispose des éléments suivants :

- le prix de vente unitaire du produit P_3 est égal à 60 €
- le coût des matières premières et des pièces utilisées pour une unité produite est égal à 15 €
- le coût de distribution est de 9 € par unité produite
- le produit P_3 est fabriqué dans deux ateliers : l'atelier U pour l'usinage et l'atelier F pour la finition.

On nous communique les renseignements suivants concernant les coûts de production pour chaque atelier et pour une unité de P_3 :

Atelier	Nombre d'heures	Coût de l'heure en euros
U	3	4
F	2	6

La marge sur coût variable est la différence entre le prix et le coût total (coûts des matières premières, de production et de distribution).
À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. Le coût de production total d'une unité de P_3 est égal à de 24€.
B. Si l'entreprise abandonne la fabrication du produit P_2, les quantités annuelles vendues de produit P_1 sont égales à un cinquième de la demande annuelle pour le produit P_3.
C. La marge sur coût variable annuelle totale du produit P_3 est égale à 360 000 €.
D. Si l'entreprise réussissait à diminuer de 25 % le coût de l'heure dans l'atelier U, la marge sur coût variable annuelle totale de P_3 augmenterait de 90 000 €.

18. L'année suivante, l'entreprise souhaite placer ses capitaux disponibles à un taux d'intérêt annuel (noté i) sur n années. Si on appelle S_0 la somme placée à l'origine, la somme acquise à la fin du placement est notée S_n et vérifie :

$$S_n=S_0\times(1+i)^n.$$

Le montant des intérêts de ce placement est alors égal à S_n-S_0.
À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. Si l'entreprise place la marge sur coût variable annuelle totale du produit P_3 (calculée à la question 17) pendant 2 ans à un taux d'intérêt de 2 %, le montant des intérêts sera égal à 14 544 €.

Pour la suite de l'exercice, on suppose que l'entreprise n'achète pas la chaîne pour fabriquer le produit P_3 mais place le montant correspondant au prix d'achat de cette chaîne.

B. Si l'entreprise récupère 600 000 €, 5 ans plus tard, alors $i = \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$.

C. Si elle place le montant à un taux d'intérêt de 2 % et si $S_n = 541\,216$ € alors $n = \dfrac{\ln(541\,216) - \ln(500\,000)}{\ln(1,02)}$

D. Si elle place le montant à un taux d'intérêt de 2 % les trois premières années puis à 4 % les trois années suivantes alors $S_n = 500\,000 \times (1,03)^6$.