Concours Accès 6 avril 2017

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Exercices n^{o} 1 à 6 : Raisonnement logique

1. Un grand-père collectionne les véhicules à pédales. Il possède des vélos (2 roues, 1 place et un guidon), des tricycles (3 roues, 1 place et un guidon) et des voitures (4 roues, 2 places et un volant).

Ses 11 petits-enfants peuvent s'installer tous en même temps dans les véhicules et occupent toutes les places. On sait que :

- Le nombre de roues est égal à 4 fois le nombre de guidons moins le nombre de places dans une voiture ;
- Il y a un tricycle de moins que l'ensemble des autres véhicules.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Il possède 3 vélos.

B. Les véhicules biplaces sont exactement 2 fois moins nombreux que les véhicules monoplaces.

C. Le nombre de roues est impair.

D. Il devra acheter un vélo pour avoir autant de vélos que de tricycles.

2. Trois amies organisent une grande fête d'anniversaire. Pour se faire, elles préparent chacune une boisson à la grenadine, mélange de sirop et d'eau. Albane apporte 4 litres, Bérénice 6 litres et Claire 2 litres.

Elles ont utilisé au total 60 cl de sirop pour ces préparations.

On mélange la boisson de Claire avec la moitié de celle d'Albane. Ce nouveau mélange contient 20 cl de sirop. On mélange le reste de la boisson d'Albane avec la moitié de celle de Bérénice. Le pourcentage de sirop dans cette nouvelle boisson est le même que celui dans la boisson originale de Claire.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Claire a utilisé 15 cl de sirop.

B. Albane a utilisé plus de sirop que Bérénice.

C. Un invité se sert 20 cl de la boisson de Bérénice. Il a donc 1 cl de sirop dans son verre.

D. Un invité se sert dans un verre, 10 cl de chacune des 3 boissons servies. Il a donc dans son verre 2 cl de sirop.

3. Lors d'un congrès, 3 intervenants : Pierre, Pascal et Paul doivent présenter successivement leur dossier personnel. Suite à une erreur administrative, chacun d'entre eux est en possession du dossier d'un de ses deux concurrents et porte le badge de l'autre.

On sait que l'intervenant qui porte le badge de Pierre détient le dossier de Pascal.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

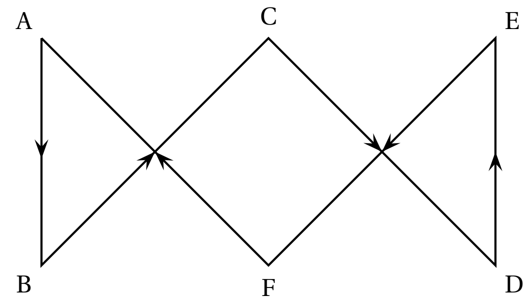
A. Pierre a le dossier de Pascal

B. Pascal porte le badge de Pierre.

C. Paul porte le badge de Pascal.

D. Pierre porte le badge de Paul.

4. Une compétition nautique entre 2 bateaux est organisée sur le parcours suivant :



ABDE forme un rectangle. La distance AB est de 3 milles nautiques (1 mille nautique = 1 852 mètres).

La distance AE est de 8 milles nautiques.

C est le milieu du sgement [AE]. F est le milieu du segment [BD].

Les bateaux partent en même temps et doivent parcourir le trajet ABCDEFA.

• Le bateau 1 vogue à une vitesse constante de 20 noeuds (1 noeud = 1 mille nautique par heure).

• Le bateau 2 avance à des vitesses différentes en fonction des endroits du parcours :

- 15 noeuds sur les parties AB et DE ;
- 20 noeuds sur les parties BC et EF ;
- 25 noeuds sur les parties CD et FA.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. La distance totale parcourue est de 30 milles nautiques.

B. Le bateau 1 mettra 1 h 18 minutes pour boucler le parcours.

C. Le bateau 1 arrivera après le bateau 2.

D. Le bateau 1 doublera 2 fois le bateau 2.

5. Une urne contient 2 boules : une verte et une rouge. On tire au hasard n fois ($n \geqslant 2$) une boule de cette urne en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n et B_n les évènements :

A_n : « Au cours de n tirages, on obtient des boules des 2 couleurs ».

B_n : « Au cours de n tirages, on obtient au plus une boule verte ».

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. $P\left(A_2\right) = \dfrac{1}{2}$

B. $P\left(\overline{A_n}\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

C. $P\left(B_2\right) = \dfrac{1}{2}$

D. La probabilité d'avoir A_3 et B_3 est égale à $\dfrac{3}{8}$.

6. Les salariés d'une entreprise peuvent avoir 3 statuts différents : cadre, agent de maîtrise ou employé.

Ces N salariés se répartissent équitablement dans k services différents. Dans chacun de ces services, il y a des employés, 2 cadres et 4 agents de maîtrise.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le nombre total de salariés non cadres est égal à : $N - 2k$.

B. Le nombre d'employés par service est égal à : $\dfrac{(N-6)}{k}$.

C. La proportion d'agents de maîtrise dans l'entreprise vaut : $\dfrac{4N}{k}$.

D. Si $N = 126$ et s'il y a 12 cadres dans l'entreprise, le nombre d'employés par service est de 12.

Exercices n° 7 à 12 : raisonnement mathématique

7. On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x - x\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

A. Le point J appartient à $\mathscr{C}_f$.

B. Le réel 1 admet trois antécédents par la fonction f.

C. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + 2x\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

D. La tangente T_0 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur positif.

8. On considère la fonction f définie pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{5\ln x}{\sqrt{x}}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

A. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{5[\ln(x) - 2]}{2x\sqrt{x}}$.

B. L'équation $f(x) = -5$ est équivalente à l'équation $x = \dfrac{1}{(\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{2}}}$.

C. La tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I a pour équation $y = 5x - 5$.

D. f admet un maximum sur $]0\,;\,+\infty[$ qui vaut 10.

9. Soit la fonction f_k définie pour tout x de $]0\,;1[$ par

$$f_k(x) = x[\ln(x)]^2 + kx, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.
On note A_k le point de $\mathscr{C}_k$ qui a pour abscisse 1.

A. $\mathscr{C}_0$ admet deux tangentes parallèles à (OI).

B. La tangente à $\mathscr{C}_k$ en A_k est la droite $(\mathrm{O}A_k)$.

C. Pour tout x de $]0\,;1[$, $f_1'(x) = [\ln(x) + 1]^2$.

D. Il existe au moins une valeur réelle de k tel que $\mathscr{C}_k$ coupe l'axe des abscisses.

10. On considère la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On considère la fonction g définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

A. La fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

B. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent comme unique point d'intersection le point J.

C. La tangente à $\mathscr{C}_f$ en J et la tangente à $\mathscr{C}_g$ en J sont perpendiculaires.

D. L'ensemble solution de l'inéquation $1 > g(x)$ est $]-\infty\,;\,0[$.

11. Avant l'examen du baccalauréat en fin d'année, les élèves de terminales d'un lycée passent deux examens blancs.

60 % des élèves réussissent le premier examen blanc. La probabilité de rater le deuxième examen blanc est de $0,3$ si le premier a été raté et de $0,2$ si le premier a été réussi.

A. La probabilité qu'un lycéen réussisse les deux examens blancs est strictement supérieure à $0,5$.

B. La probabilité qu'un lycéen réussisse le deuxième examen blanc est strictement supérieure à $0,5$.

C. Si un lycéen réussit le deuxième examen blanc, la probabilité qu'il ait réussi le premier examen blanc est strictement supérieure à $0,5$.

D. Si un lycéen rate le deuxième examen blanc, la probabilité qu'il ait également raté le premier examen blanc strictement supérieure à $0,5$.

12. Soit la fonction f_n définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x^2},\ \text{avec } n \geqslant 2.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

On note S_n le point de $\mathscr{C}_n$ qui a pour abscisse $\sqrt{\dfrac{n}{2}}$.

A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f_n'(x) = -2nx^n\mathrm{e}^{-x^2}$.

B. Le maximum de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

C. Pour tout $n \geqslant 2$, $S_2 \in \mathscr{C}_n$.

D. Pour tout $n \geqslant 2$, l'axe des abscisses est la tangente à $\mathscr{C}_n$ à l'origine du repère.

Exercices n° 13 à 18 : problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Une société de vente par correspondance gère un réseau commercial et logistique composé de trois centres de commandes (C_1, C_2, C_3), de deux centres de préparation de commandes (P_1, P_2), et de deux centres de distribution D_1, D_2.
Pour répondre à la demande de fin d'année, la direction générale désire évaluer la capacité mensuelle du réseau, c'est-à-dire le nombre maximum de commandes pouvant être prises, préparées et livrées en un mois. Le réseau (voir **schéma**) possède les caractéristiques suivantes exprimées en milliers de commandes par mois :

— les capacités maximales de prise de commandes des centres C_1, C_2 et C_3 sont respectivement de 30, 30 et 10. Toutes les commandes arrivées aux centres C_1, C_2 et C_3 doivent être traitées.

— les capacités maximales de préparation des centres P_1 et P_2 sont respectivement de 10 et 60.

Toutes les commandes arrivées aux centres P_1 et P_2 doivent être préparées.

— Les capacités de distribution pour les centres D_1 et D_2 sont respectivement de 30 et 50.

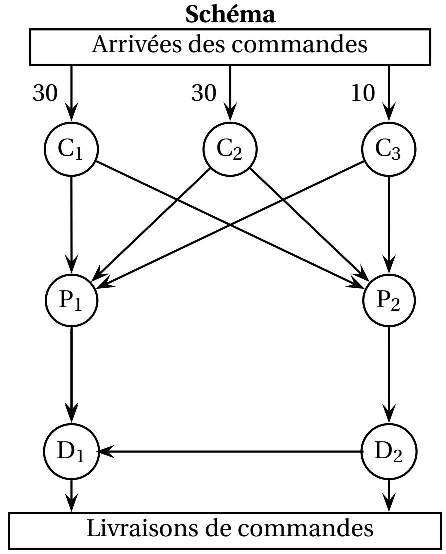
Toutes les commandes arrivées aux centres D_1 et D_2 doivent être distribuées.

— Chaque centre de prise de commandes (C_1, C_2, C3) peut alimenter les deux centres de préparation (P_1 et P_2) mais les capacités des liaisons informatiques limitent à un maximum de 20 000 commandes par mois le flux entre un centre de commande (C_1, C_2, C_3) et un centre de préparation de commandes (P_1 ou P_2).

— Le centre P_1 alimente uniquement le centre D_1 et le centre P_2 alimente uniquement le centre D_2.

— Le centre D_2 a la possibilité de transférer une partie de son activité sur le centre D_1 ; ce transfert ne peut pas dépasser 20 000 commandes par mois et ne réduit pas la capacité maximale de distribution du centre D_2.

Schéma



13. Durant le mois dernier, on a relevé les informations suivantes : les centres de commandes C_1 et C_2 ont reçu chacun 20 000 commandes et le centre et C_3 a reçu seulement 10 000 commandes ; le centre P_1 avait reçu 10 000 commandes de C_1 et aucune commande de C_2 ; le centre P_2 avait reçu 10 000 commandes de C_3. Le centre D_2 n'a transféré aucune partie de son activité sur le centre D_1.

À partir des informations précédentes, on peut conclure qu'au mois dernier :

A. Le centre P_1 a reçu 10 000 commandes de C_3.

B. Le centre P_2 a reçu entre autre 10 000 commandes de C_3 et 20 000 commandes de C_2.

C. Les centres distribution D_1 et D_2 ont distribué au total 50 000 commandes.

D. Si D_2 avait transféré 10 000 commandes de son activité sur le centre D_1 alors les centres de distribution D_1 et D_2 auraient distribué au total 50 000 commandes.

14. L'historique a permis de constater que parmi toutes les commandes arrivant à la société, il y en a 50 % qui arrivent à C_1 et seulement 30 % qui arrivent au centre C_2 (donc 20 % arrivent à C_3).

On a aussi constaté que 70 % des commandes transmises aléatoirement par l'un quelconque des centres de commandes (C_1, C_2 ou C_3) sont préparées au centre P_1 (donc 30 % y sont préparées au centre P_2).

Sur la base des informations précédentes, on peut conclure :

A. La probabilité qu'une commande soit reçue par le centre C_1 et préparée dans le centre P_1 est égale à 0,35.

B. Il y a 1 chance sur 2 pour qu'une commande soit préparée dans le centre P_1 et reçue par l'un des centres C_1 ou C_3.

C. La probabilité qu'une commande soit préparée dans le centre P_2 est égale à 0,35.

D. Quand une commande a été préparée dans le centre P_2, la probabilité qu'elle ait été reçue par le centre C_3 est égale à $0,20$.

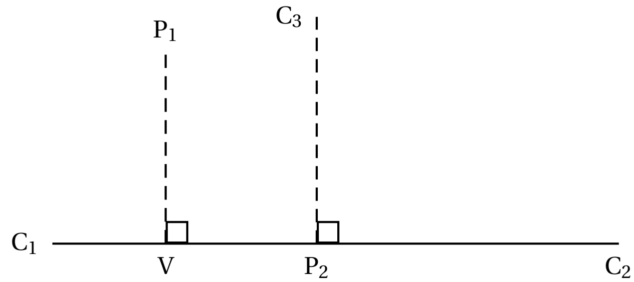
15. Le siège de la société se trouve dans la ville V. Les centres C_1, C_2, C_3, P_1 et P_2 se situent dans des villes différentes dont la configuration géographique est la suivante (voir figure).

Toutes les distances s'expriment en km.

C_1, C_2, C_3, P_1 se trouvent à la même distance r de P_2.

C_1, C_2, P_2 et la ville V sont alignés.

La ville V se situe à une distance x de P_1 et à une distance de 5 km de C_1.



À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. $x^2 - 10r + 25 = 0$.

B. Pour aller de P_1 à C_3 il faut parcourir au moins la distance $\sqrt{2r^2 + x^2 - 2xr + 10r + 25}$.

C. La distance minimale entre P_1 et C_2 est égale à $\sqrt{4r2 + x^2 - 25}$.

D. Pour aller de la ville V à C_2 en passant par C_3 on parcourt au moins la distance $r\sqrt{2} + \sqrt{2r^2 - 10r + 25}$.

16. Dans les conditions de capacités maximales des différents centres, l'historique des commandes a montré que la situation mensuelle qui permet de distribuer le plus de commandes (c'est-à-dire celle qui maximise les capacités mensuelles de distribution pour les centres D_1 et D_2) est la suivante : les centres de commandes C_1, C_2 et C_3 devant traiter respectivement 30 000, 20 000 et 10 000 commandes; le centre P_2 devant préparer 20 000 commandes de C_1, 20 000 commandes de C_2 et 10 000 commandes de C_3.

On appelle situation optimale la situation permettant de distribuer le plus grand nombre de commandes.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que dans la situation optimale :

A. Le centre P_1 ne reçoit aucune commande ni de C_2 ni de C_3.

B. Le centre D_2 n'a pas l'obligation de transférer une partie de son activité sur le centre D_1.

C. Pour pouvoir distribuer plus de commandes, il suffit d'augmenter la capacité de liaison informatique reliant le centre C_1 au centre P_1.

D. Pour pouvoir distribuer plus de commandes, il suffit d'augmenter la capacité de liaison informatique reliant le centre C_2 au centre P_2.

17. Les capacités de préparation des centres P_1 et P_2 ne sont plus limitées comme indiqué initialement.

On note respectivement x et y les capacités journalières de préparation pour P_1 et P_2. Dans chaque centre de préparation P_1 et P_2, il Y a 3 équipes de personnes qui y travaillent : une équipe du matin,une équipe de l'après-midi, et une équipe de nuit.

On sait que chaque commande préparée par le centre P_1 nécessite 2 heures de travail le matin, 2 heures l'après-midi et 4 heures de travail la nuit.

Chaque commande préparée par le centre P_2 nécessite 2 heures de travail le matin, 3 heures l'après-midi et 1 heure de travail la nuit.

La direction limite le travail journalier global à un maximum de 6 000 heures le matin, 8 000 heures l'après-midi et 6 000 heures la nuit. L'objectif est de préparer le maximum de commandes.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. $2x + 3y \leqslant 8000$

B. Avec les conditions de travail fixées par la direction, le centre P_1 ne peut pas préparer plus de 1 500 commandes en 24 heures.

C. Avec les conditions de travail fixées par la direction, les centres P_1 et P_2 peuvent préparer respectivement 1 500 et 1 000 commandes en 24 heures.

D. La capacité optimale de préparation journalière totale des 2 centres P_1 et P_2 est égale à 3 000 commandes.

18. La société prévoit 70 000 commandes pour le mois prochain. Les capacités actuelles des centres ne pourront pas traiter la totalité de ces commandes. Pour prendre en compte ces prévisions, plusieurs solutions sont envisagées par différents services de la société :

- le service commercial propose d'augmenter les capacités de l'un des centres C_1 ou C_2 ;
- le service informatique propose d'augmenter les capacités de transmission de toutes les lignes au départ de C_1 et C_2 ;
- le service de la logistique propose d'augmenter la capacité de préparation de P_1 à 20 000 commandes;
- et enfin le service des ressources humaines propose de transférer temporairement, pour le mois prochain, du personnel de C_1 vers C_3, ce qui permettrait le glissement d'une capacité de 10 000 commandes au profit de C_3.

Une seule des solutions proposées par les différents services peut se réaliser.

À partir des informations précédentes, on peut conclure :

A. La solution du service commercial ne permet pas de prendre en compte l'augmentation des commandes du mois prochain.

B. La solution du service informatique peut permettre de prendre en compte l'augmentation des commandes du mois prochain.

C. La solution du service logistique permet de prendre en compte l'augmentation des commandes du mois prochain.

D. La solution du service des ressources humaines ne permet pas de prendre en compte l'augmentation des commandes du mois prochain.