Concours Accès 5 avril 2018

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Exercices n^{o} 1 à 5 : Raisonnement logique

1. Au premier janvier, Pierre et Colette disposent chacun d'un capital sur leur compte bancaire respectif (comptes non rémunérés). La somme de ces 2 capitaux est égale à 54 000 €.

Au premier février, Pierre verse à Colette un montant permettant à Colette de doubler le capital qu'elle détenait sur son compte.
Au premier mars, c'est Colette qui donne à Pierre un montant permettant à ce dernier d'augmenter de moitié le capital que Pierre détenait sur son compte. En dehors de ces 2 mouvements de capitaux, aucun retrait et aucun apport ne sont effectués pendant cette période.

Suite à ces 2 transferts, Pierre et Colette constatent qu'ils possèdent un capital identique sur chacun de leurs comptes.
A partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Au premier janvier, le capital de Pierre est égal à celui de Colette.

B. Au premier janvier, le capital de Pierre est égal à celui de Colette majoré de 50 %.

C. Le premier février, Pierre a donné 20 000 euros à Colette

D. Le premier mars, Colette a donné 9 000 euros à Pierre.

2. Bertrand, Charles et Michel pratiquent un sport différent (et un seul) parmi les 3 suivants : football, golf et tennis.
Parmi les 4 propositions suivantes, une seule est vraie :

1. Charles ne fait pas de football.
2. Bertrand ne fait pas de golf.
3. Bertrand ne fait pas de football.
4. Charles fait du golf.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Charles fait du football.

B. Bertrand ne fait pas de tennis.

C. Michel fait du football.

D. Bertrand fait du golf.

3. Avant une élection présidentielle à la majorité absolue, on a interrogé 1 000 personnes (600 hommes et 400 femmes).
530 personnes annoncent leur intention de voter pour le candidat X. Chacune des 1000 personnes déclare qu'elle ne changera plus son vote.
L'institut de sondage estime que ce résultat peut être généralisé à l'ensemble des électeurs de la population avec une marge d'erreur de plus ou moins 10 %.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. La probabilité que le candidat X soit élu est égale à 1 si ces 1 000 personnes sont les seuls électeurs.

B. Le candidat X obtiendra entre 47,7 % et 53 %.

C. Le candidat X sera élu.

D. Sachant que les 600 hommes interrogés étaient plus favorables au candidat X, cela augmente sa probabilité de gagner.

4. Une entreprise réalise une enquête sur le taux de pénétration d'un nouveau produit. La clientèle interrogée se répartit en 3 classes d'âge :

- Classe 1 : clients de moins de 30 ans
- Classe 2 : clients de 30 ans à 50 ans
- Classe 3 : clients de plus de 50 ans.

Le tableau ci-dessous donne 2 informations :

- la proportion de clients appartenant à chaque classe d'âge (colonne 2)
- la probabilité qu'un client, d'une classe donnée, achète le nouveau produit (colonne 3).

Classe	Proportion	Probabilité
1	0,3	0,10
2	0,5	0,20
3	0,2	0,35

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. La probabilité qu'un client tiré au hasard achète le produit est égale à $0,65$.

B. La probabilité qu'un acheteur potentiel du produit ait moins de 30 ans est égale à $0,15$.

C. Sachant qu'un client est âgé de 30 ans ou plus, la probabilité qu'il achète le produit est égale à $17/70$.

D. Il y a 40 % de chances pour qu'un client n'ayant pas l'intention d'acheter le produit n'appartienne pas à la classe 2.

5. Un enseignant affirme : « Un de mes élèves a une note au plus égale à 8/20 ».
Nous savons que cette affirmation est fausse.
À partir de ces informations, on peut conclure que :

A.. Tous ses élèves ont plus de 8/20.

B. Seul un de ses élèves a une note supérieure à 8/20.

C. Certains de ses élèves ont moins de 8/20.

D. Quelques-uns de ses élèves ont plus de 8/20.

Exercices n° 6 à 10 : Raisonnement mathématique

6. On considère la fonction G définie pour tout x de $]0\,;\,7]$ par $G(x) = 5\ln(x)^2$.
On admet que G est dérivable sur $]0\,;\,7]$ et on note g sa fonction dérivée.

A. Pour tout x de $]0\,;\,7]$, $g(x) = \dfrac{5}{x^2}$.

B. g admet un maximum qui est $10\mathrm{e}$.

C. g est strictement positive sur $[2\,;\,7]$.

D. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x$ est un entier naturel.

7. Soit la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 2}$ ainsi que la fonction k définie par $k(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 2\right)$.

A. Il existe un unique élément de $\mathbb{R}$ qui n'admet pas d'image par la fonction k.

B. $h'(0) < k(0)$.

C. Pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$ on a $h(x) = 3k'(x) - 1$.

D. $\displaystyle\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left[\frac{\left(\mathrm{e}^2+2\right)^3}{27}\right] - 2$.

8. Soit n un entier naturel.
On considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par $P_n(x) = x^3 - 3nx^2 + \left(3n^2 - 1\right)x - n(n+1)(n-1)$.

A. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $P_n(n) = 0$.
B. Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $P_n(n-1) = P_n(n+1)$.
C. Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout x de $\mathbb{R}$, $P'_n(n) = 0$.
D. P_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n+1\ ;\ +\infty[$.

9. Soit a un réel. On considère la fonction f_a définie pour tout réel x par $f_a(x) = x + a\mathrm{e}^{-x}$.
Soit $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans un repère (O, I, J) du plan.
Soit A_a le point de $\mathscr{C}_a$ d'abscisse nulle. Soit T_a la tangente à $\mathscr{C}_a$ en A_a.

A. f_a est monotone sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a \leqslant 0$.
B. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{I} \in T_a$.
C. Lorsque $a > 0$, le minimum de f_a est négatif si et seulement si $a < \mathrm{e} - 1$.
D. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, T_a et (OI) sont sécantes en un point dont l'abscisse est $\dfrac{a}{a-1}$.

10. Kate oublie souvent ses clefs. On note, pour tout $n \geqslant 1$, C_n l'évènement : « Kate oublie ses clefs le jour n ».
On note c_n la probabilité de C_n.
Si le jour n, Kate oublie ses clefs, alors la probabilité qu'elle les oublie le jour suivant est de $0,5$.
Si le jour n, Kate n'oublie pas ses clefs, alors la probabilité qu'elle les oublie le jour suivant est de $0,3$.
Enfin on considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \geqslant 1$, par $8c_n = 8v_n + 3$.

A. $c_1 = 0,1$ si et seulement si $c_2 = 0,32$.
B. pour tout $n \geqslant 1$, $c_{n+1} = 0,3c_n + 0,2$.
C. (v_n) est une suite géométrique de raison $0,2$.
D. La limite de la suite (c_n) est $0,375$.

Exercices n° 11 à 15 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

Dans le cadre de la construction d'un grand complexe hôtelier et récréatif, une société de bâtiment et travaux publics doit acheminer par camion une quantité de matériaux sur le chantier. Les matériaux doivent être acheminés en une semaine, sur 5 jours, du lundi au vendredi. Le départ des camions s'effectuera de la ville V_1.
Le chantier se situe dans la ville V_2.

La société de BTP n'a pas de contraintes sur le nombre de camions utilisés car elle en possède plus de 300.

En vue de ne pas perturber la circulation, en particulier sur les grands axes, la gendarmerie a fixé, pour la semaine, les diverses routes susceptibles d'être utilisées, et pour chacune d'elles, outre le sens de parcours, le nombre maximum de camions qui pourront l'emprunter. Ces contraintes doivent être obligatoirement respectées. Les routes relient entre elles les villes V_1, A, B, C, D, E et la destination V_2.
Les données sont consignées dans le tableau suivant :

	vers A	vers B	vers C	vers D	vers E	vers V_2
de V_1	80	60	80	-	-	-
de A	-	-	-	50	20	-
de B	-	-	-	40	30	-
de C	-	30	-	-	50	-
de D	-	-	-	-	-	100
de E	-	-	-	-	-	150

11. À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Un maximum de 250 camions pourrait arriver sur le chantier dans la ville V_2 s'il n'existait que des contraintes entre les villes D, E et V_2.
B. Un maximum de 200 camions pourrait partir de V_1 s'il n'existait que des contraintes entre les villes V_1, A, B, et C.
C. En utilisant les routes V_1-C, C-E et E-V_2 uniquement, l'entreprise pourrait envoyer un maximum de 50 camions.
D. Compte tenu des contraintes entre les villes A, D et E, un maximum de 75 camions peut emprunter la route V_1-A.

12. À partir des informations, on peut conclure que :

A. Un maximum de 70 camions peut transiter par la ville B.
B. Un maximum de 190 camions pourra arriver sur le chantier dans le ville V_2.
C. Si la contrainte entre C et E était de 60 camions au lieu de 50, 10 camions de plus pourraient arriver sur le chantier dans la ville V_2.
D. Si la contrainte entre B et D était de 30 camions au lieu de 40, 10 camions de moins arriveraient sur le chantier dans le ville V_2.

13. L'entreprise de BTP a calculé qu'elle doit utiliser le maximum de camions autorisé par la gendarmerie sur la semaine. Pour réduire la perturbation sur les routes, elle utilisera le même nombre de camions chaque jour. Elle s'est mise d'accord avec la gendarmerie sur le principe suivant : chaque jour, sur chacune des routes, elle ne dépassera pas le cinquième du nombre maximum hebdomadaire de camions autorisé.

Malheureusement, en cette période d'hiver, les conditions climatiques peuvent perturber l'acheminement des matériaux mais uniquement sur les 2 routes D-V_2 et E-V_2.

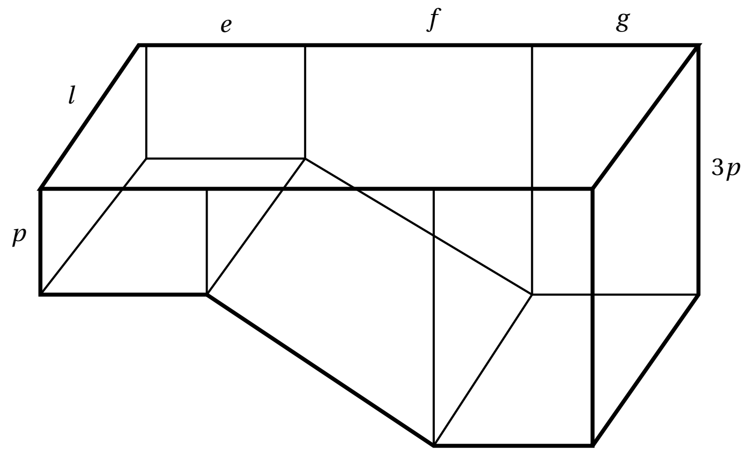
On désignera par E_1, l'évènement « la route entre D et V_2 est bloquée par la neige mardi » et par E_2, l'évènement « la route entre E et V_2 est inaccessible en raison du verglas mardi ».

La probabilité de l'évènement E_1 est égale à 0,07. La probabilité de l'évènement E_2 est égale à 0,05. La probabilité de l'évènement « les deux routes sont inutilisables » est égale à $0,03$.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. La probabilité qu'au moins une des 2 routes soit inutilisable mardi est de $0,06$.
B. La probabilité qu'au moins une des routes soit utilisable mardi est de $0,97$.
C. La probabilité que les 2 routes soient utilisables mardi est de $0,91$.
D. Si les deux routes étaient bloquées mardi, 35 camions au total seraient immobilisés dans les villes D et E.

14. L'entreprise de BTP doit construire une piscine de largeur l et de longueur L divisée en trois parties : une partie 1 de longueur e et de profondeur p, une partie 2 de longueur f et une partie 3 de longueur g et de profondeur $3p$ avec $L = e+f+g$ comme indiqué sur le schéma ci-dessous. L, l, e, f, g, et p sont exprimées en mètres. Les 3 parties n'ont pas de paroi de séparation entre elles. Le sol et les parois latérales de la piscine seront carrelées.



À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Le volume de la partie 3 est de $3gp$ m^3.
B. Le volume de la partie 2 est de $4flp$ m^3.
C. Le volume total de la piscine est de $lp(3g+2f+e)$ m^3.
D. la surface au sol à carreler est de $l\left(e+g+\sqrt{4p^2+f^2}\right)$ m^2.

15. Les dimensions exactes de la piscine gigantesque ont maintenant été définies ;

$$l = 15 \text{ m},\ e = 20 \text{ m},\ f = 30 \text{ m},\ g = 20 \text{ m, et } p = 1 \text{ m}.$$

La piscine construite sera remplie par 2 pompes électriques. La pompe P_1 pourrait remplir à elle seule la piscine en 20 heures. Les pompes P_1 et P_2 peuvent remplir ensemble la piscine en 12 heures.
À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. La surface à carreler sera supérieure à 1 500 m^2.
B. Le volume de la piscine sera de 2 100 m^3.
C. La pompe P_1 a un débit de 1 500 litres par minute .
D. La pompe P_2 a un débit supérieur à la pompe P_1.