ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures

INSTRUCTIONS AUX CANDIDATS

L'usage de la calculatrice ou de tout appareil électronique est **interdit.**

L'épreuve comporte 16 exercices indépendants. Vous ne devez en traiter que 12 maximum. Si vous en traitez davantage, **seuls les 12 premiers** seront corrigés.
Un exercice comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c, d. Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Un exercice est considéré comme traité dès qu'une réponse à une des 4 affirmations est donnée (l'abstention et l'annulation ne sont pas considérées comme réponse).
Toute réponse exacte rapporte un point.
Toute réponse inexacte entraîne le retrait d'un point.
L'annulation d'une réponse ou l'abstention n'est pas prise en compte, c'est-à-dire ne rapporte ni ne retire aucun point.
Une bonification d'un point est ajoutée chaque fois qu'un exercice est traité correctement en entier (c'est-à-dire lorsque les réponses aux 4 affirmations sont exactes).

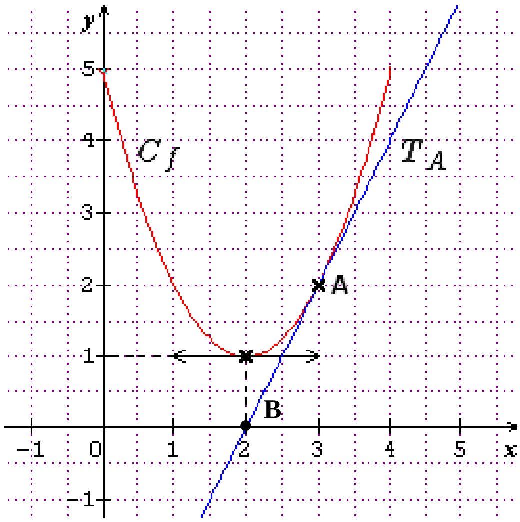
L'attention des candidats est attirée sur le fait que, dans le type d'exercices proposés, une lecture attentive des énoncés est absolument nécessaire, le vocabulaire employé et les questions posées étant très précis.

Exercice n°1

Lecture-interprétation énoncé

Soit f une fonction définie, dérivable et ne s'annulant pas sur l'intervalle I=[0 ; 4]. On pose C_f la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ et g la fonction définie sur [0 ; 4] par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

La tangente T_A au point A(3 ;2) passe par le point B(2 ;0).



a) $f'(2) = 1$.

b) $f'(3) = f(3)$.

c) *Une équation de T_A est $y = 2x + 2$.*

d) $g'(3)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice n°2

Logique

Soit x un réel donné.

a) *Si* $\sqrt{x}=2$ *alors* $|x|=4$.

b) *La réciproque du a) est toujours vraie.*

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I = [-3 ;7].

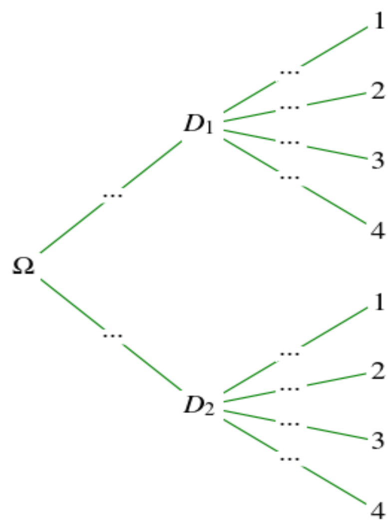
c) *Si, pour tout* $x\in\mathrm{I}$, $f'(x)>0$ *et* $f(-3)=1$ *alors, pour tout* $x\in\mathrm{I}$, $f(x)>0$.

d) *Si une suite est croissante et admet une limite finie alors elle est nécessairement bornée.*

Exercice n°3

Probabilités conditionnelles

On joue avec deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Le premier dé, D_1, est un dé « honnête » c'est-à-dire pour lequel la sortie de chacune des faces est équiprobable ;
Le deuxième dé, D_2, est truqué de façon que :
• la face numérotée 1 et la face numérotée 4 ont une chance sur douze de sortir ;
• la face numérotée 3 a une chance sur quatre de sortir.



a) *On lance le dé n°2 , la probabilité de l'événement « on a obtenu la face numérotée 2 » est égale à* $\frac{7}{12}$.

Dans toute la suite, on lance un dé pris au hasard.

b) *La probabilité d'obtenir l'événement « on a obtenu la face numérotée 1 » est égale à* $\frac{1}{9}$.

c) *Les événements « on a obtenu un numéro pair » et « on a utilisé le dé* D_1 *» sont indépendants.*

d) *Sachant qu'on a obtenu la face numérotée 1, la probabilité qu'on ait utilisé le dé* D_1 *est égale à* $\frac{3}{4}$.

Exercice n°4

Lien entre tableau et arbre de probabilités

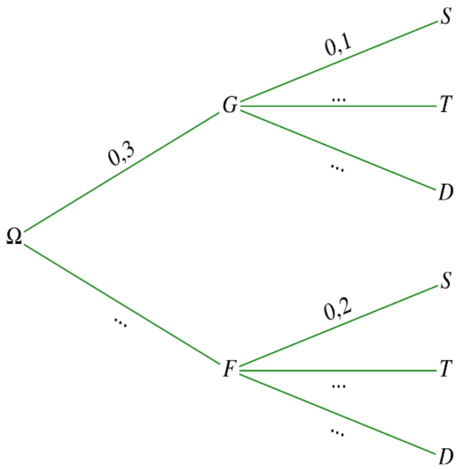
Dans un lycée, les 200 élèves de Terminale se répartissent suivant les 3 activités : sport (S), théâtre (T) et dessin (D).

On donne les informations suivantes :

- 20 garçons choisissent le théâtre et 34 garçons choisissent le dessin.
- 28 filles choisissent le sport et 72 filles choisissent le dessin.
- Le nombre total de garçons représente 30% de l'effectif total.
- Le sport est choisi par 10% des garçons et par 20% des filles.
- On pose x le nombre total de filles.

On note G l'événement « l'élève est un garçon », F l'évènement « l'élève est une fille », S l'événement « l'élève fait du sport », T l'événement « l'élève fait du théâtre » et D l'événement « l'élève fait du dessin ». On rassemble les informations précédentes dans le tableau et l'arbre ci-dessous.

	Garçons (G)	Filles (F)	Total
Sport (S)		**28**	
Théâtre (T)	**20**		
Dessin (D)	**34**	**72**	
Total		x	**200**



a) *La probabilité qu'un garçon fasse du sport est égale à 0,1.*

b) $x = 160$.

c) *La probabilité qu'un élève fasse du théâtre est égale à 0,3.*

d) $P_T(F) = \dfrac{2}{5}$.

Exercice n°5

Calcul du nombre d'abonnés d'une société.

Le service commercial d'une société possédant plusieurs salles de sport dans une grande ville a constaté que l'évolution du nombre d'abonnés était définie de la manière suivante :

- chaque année, la société accueille 400 nouveaux abonnés ;
- chaque année, 40% des abonnements de l'année précédente ne sont pas renouvelés.

En 2010 cette société comptait 1 500 abonnés.
La suite (a_n) modélise le nombre d'abonnés pour l'année 2010 + n.
On définit la suite (v_n) par $v_n = a_n - 1000$.

a) $a_1 = 1300$.
b) $a_{n+1} = 0,6 \times a_n + 400$.
c) *La suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 0,4$.
d) $a_n = 500 \times 0,6^{n-1} + 1000$.

Exercice n°6

Calculs de limites

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - 4x + 7 = -\infty$.

b) *Si, pour tout* $x \in \mathbb{R}^*, -\dfrac{1}{x} \leq f(x) - 3 \leq 0$, *alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n + 3}{3^n + 2} = \dfrac{3}{2}$.

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2n + (-1)^n} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice n°7

Notions de base sur les complexes

a) $(2i)^4 = -16$.

b) *La forme trigonométrique de* $\dfrac{-3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$ *est* $-3\times\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\times\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

c) *Soit* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 = z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$.

d) $\arg\left(\dfrac{(1+i)^2}{\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -\dfrac{7\pi}{6}[2\pi]$.

Exercice n°8

Calculs d'intégrales

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{2}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{2} - 1$.

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{\ln 3}{2}$.

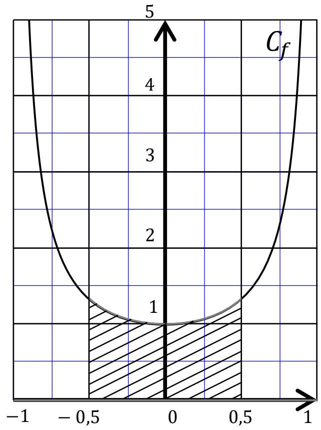
d) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2-1}{x+1}\,dx = 2$.

Exercice n°9

Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (fig. ci-contre).



a) *La dérivée de f est définie sur* $]-1;1[$ *par* $f'(x)=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.

b) *La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse x = 0,5 est parallèle à la droite (D) d'équation $16x - 9y - 7 = 0$.*

c) *La fonction F définie sur* $]-1;1[$ *par* $F(x)=-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ *est une primitive de f.*

d) *L'aire du domaine (hachurée sur la figure) compris entre les droites d'équations* $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$, *l'axe des abscisses et la courbe C_f vaut, en unités d'aires du repère,* $\dfrac{1}{2}\ln(3)$.

Exercice n°10

Problème autour de la fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2e^{x}+5x+4$.
On définit f' la dérivée de f et f'' la dérivée de f'.

a) $f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}+5$ *et* $f''(x)=2e^{x}\left(2e^{x}-1\right)$.

b) $2e^{x}-1>0 \Leftrightarrow x<\ln 2$.

c) *La fonction* f' *est croissante sur* $[0;+\infty[$.

d) *f est décroissante sur* $[0;+\infty[$.

Exercice n°11

Problème autour de la fonction ln.

On considère la fonction f définie sur $I =]5\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(2x+1) - 3\ln(x-5) + 5$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) $f'(x) = \dfrac{4x+13}{(2x+1)(5-x)}$.

b) C_f *admet la droite d'équation* $x = 5$ *comme asymptote verticale.*

c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^5(2x+1)}{(x-5)^3}\right)$.

d) C_f *admet la droite d'équation* $y = 5$ *comme asymptote horizontale en* $+\infty$*.*

Exercice n°12

Utilisation des algorithmes dans une suite

Soit N un entier naturel.
On considère l'algorithme **ALGO n°1** ci-contre :
Par exemple, si on saisit la valeur 2 pour N, l'algorithme affiche le nombre 9 comme valeur de U.

Variables	N	I	U
Initialisation	*2*	---	*1*
Boucle Pour	*2*	*1*	*4*
	2	*2*	*9*

```
ALGO n°1

Début programme
  Lire N
  U prend la valeur 1
  Pour I allant de 1 à N
    Début Pour
    U prend la valeur U + 2×I + 1
    Fin Pour
  Afficher U
Fin du programme
```

```
ALGO n°2

Début programme
  Lire N
  U prend la valeur 1
  I prend la valeur 0
  Tant que I < N Faire
    Début Tant que
    U prend la valeur U + 2×I + 1
    I prend la valeur I + 1
    Fin Tant que
  Afficher U
Fin du programme
```

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ *et, pour tout entier naturel n,* $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

a) *L'algorithme* ***ALGO n°1*** *permet d'afficher la valeur de* u_N *connaissant N.*

b) $u_4 = 16$.

c) *L'algorithme* ***ALGO n°2*** *permet d'afficher la valeur de* u_N *connaissant N.*

d) *Pour tout entier naturel n,* $u_n = (n+1)^2$.

Exercice n°13

Probabilités continues.

La durée de vie (exprimée en années) d'un appareil électroménager avant la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

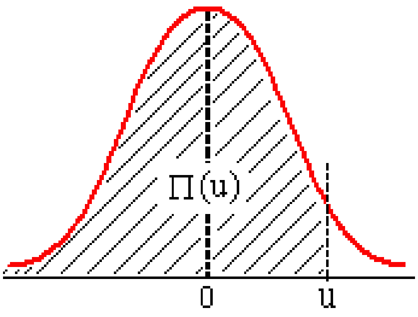
a) *Pour tout réel t strictement positif,* $p(X \geq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

b) *Si la probabilité d'avoir une panne la première année est égale à 0,2, alors* $\lambda = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$ *avec* $\sigma > 0$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose $\Pi(u) = P(Y \leq u)$.

$\Pi(u)$ représente l'aire de la surface hachurée ci-contre.



c) $P(0 \leq Y \leq \sigma) > 0{,}4$.

d) $\Pi(-\sigma) \leq \frac{1}{10}$.

Exercice n°14

Géométrie analytique.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on donne les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives (P) : $x + y + 3z = 1$ et (Q) : $-y + 2z = 4$.

(D) est la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -5t + 1 \\ y = 2t \\ z = t - 1 \end{cases}$ pour tout t réel.

a) *Le plan (Q) est orthogonal à l'axe des abscisses.*
b) *Les plans (P) et (Q) sont sécants suivant une droite* Δ.
c) *Une équation cartésienne de* Δ *est* $x + 5z = 5$.
d) *D est parallèle à* Δ.

Exercice n°15

Utilisation des complexes en géométrie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 2-3i,\ z_B = i,\ z_C = 6-i$ *et* $z_D = -2+5i$.

a) $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i$.

b) *Le triangle ABC est équilatéral.*

x et *y* désignent deux nombres réels, on note *f* la fonction qui, à tout point M d'affixe $z = x + iy$ distinct de *i*, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{i\times\left(z-2+3i\right)}{z-i}$.

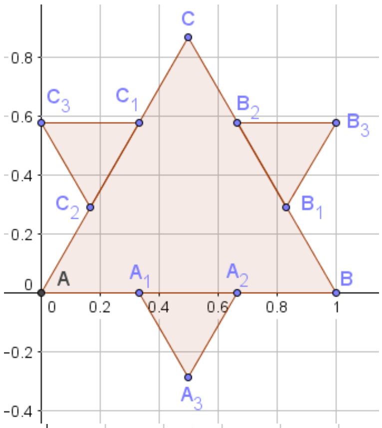
c) *La partie imaginaire de* z' *est* $\dfrac{x^2-2x+y^2+2y-3}{x^2+\left(y-1\right)^2}$.

d) *L'ensemble* γ *des points M d'affixe z tels que z' soit un réel est une droite.*

Exercice n°16

Utilisation des algorithmes en géométrie.

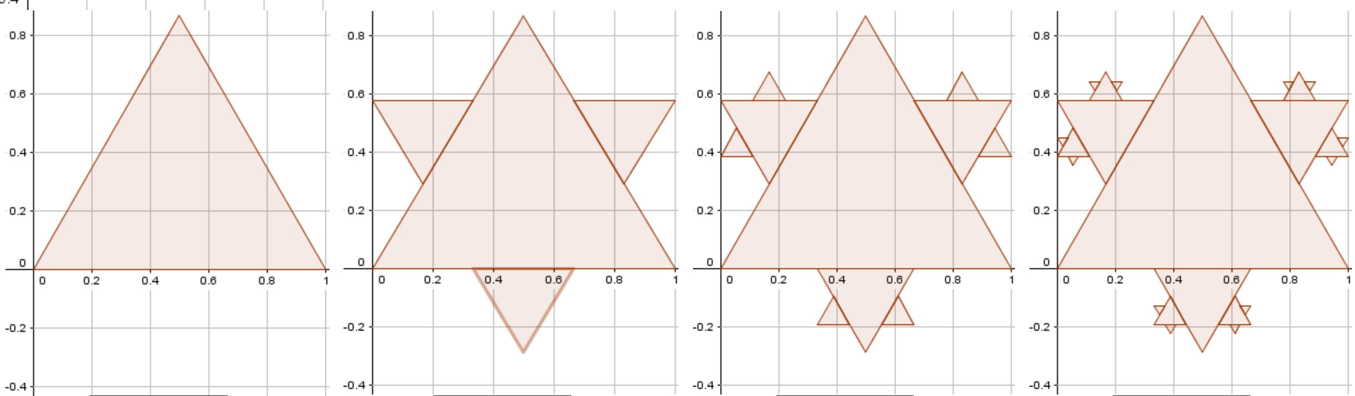
On effectue le programme de construction ci-dessous :



<u>Etape 1 :</u>

- On divise chaque côté d'un triangle équilatéral de côté 1 en 3 segments de même longueur (par exemple les segments : $[A;C_2],[C_2;C_1]$ et $[C_1;C]$).
- Sur chacun des côtés du triangle, on construit, à l'extérieur du triangle, un triangle équilatéral ayant pour base le second segment (par exemple le triangle $C_1C_2C_3$ ayant pour base le segment $[C_2;C_1]$ pour le côté $[A;C]$).

<u>Etapes suivantes :</u>
Sur chaque triangle obtenu à l'étape précédente, on construit deux nouveaux triangles équilatéraux selon le même procédé de construction que celui de l'étape 1.



Etape 0 | Etape 1 | Etape 2 | Etape 3

Pour tout entier naturel n, on pose :

- u_n le nombre de triangles construits à l'étape n,
- l_n la longueur du côté du triangle équilatéral construit à l'étape n,
- h_n la hauteur du triangle équilatéral construit à l'étape n,
- s_n la surface que l'on colore à l'étape n.

a) $h_1 = \dfrac{1}{2\times\sqrt{3}}$.

b) *La suite* $(l_n)_{n\geq 0}$ *est une suite géométrique de raison* $q = \dfrac{1}{3}$.

c) $h_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2\times 3^n}$.

d) *Si* $n \geq 1$ *alors* $s_n = \dfrac{3\times\sqrt{3}\times\left(\dfrac{2}{9}\right)^n}{8}$.