Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

30 avril 2016 Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  - Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  - Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

1. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}\ \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, alors :

(A) f est continue sur $]-\infty\ ;\ -1[$

(B) Pour tout $x \in \mathbb{R}\ \{-1\}$ $f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

(C) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(D) f est décroissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

(E) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}\ \{-1\}$.

2. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 - \frac{4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{2x} - 1,$$

alors :

(A) Pour tout $x \in]-\infty\ ;\ 0]$, $g(x) \leqslant 0$.

(B) Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$.

(C) f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$.

(D) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

(E) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Soit pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \cos(2x)$, $\quad g(x) = \sin^2(x)$, alors :

(A) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$.

(B) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \sin(2x)$.

(C) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2g'(x)$.

(D) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 1$.

(E) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 2$.

4. Soit f la fonction numérique définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x) + 1 - x$, alors :

(A) $f(1) > 0$.

(B) Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$ $f'(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$.
(C) f est strictement décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
(D) $\lim f(x) = -\infty$.
(E) Il existe un unique $a \in [1\ ;\ +\infty[$, $a = \ln(2a) + 1$.

5. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[-2\ ;\ 3]$ telle que $f(0) = 1$ et dont la **dérivée** f' a pour tableau de variations :

x	-2		-1		0		1		3
$f'(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Alors :

(A) f est croissante sur $[-1\ ;\ 0]$.
(B) f est croissante sur $[1\ ;\ 3]$.
(C) Pour tout $x \in [0\ ;\ 3]$, $f(x) \geqslant 1$.
(D) Pour tout x et x' tels que $-2 < x < x' < 0$, $f\left(x'\right) < f(x)$.
(E) $f(-2) \geqslant 1$.

6. Soit a, b, c et d quatre entiers naturels non nuls. On a :

(A) $\dfrac{a}{bc} = \dfrac{\frac{a}{b}}{c}$.
(B) $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$.
(C) $\dfrac{a+b}{c+d} = \dfrac{a}{d}$.
(D) $\dfrac{ab}{c} = \dfrac{a}{\frac{b}{c}}$.
(E) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

7. Soit $D =]0\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.
Alors :

(A) f est continue sur $]0 ; 1[$.
(B) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.
(C) Sur $]1\ ;\ +\infty[$, une primitive F de f est : $F(x) = -\dfrac{1}{\ln^2(x)}$.
(D) f admet une primitive sur $]0 ; 1[$.
(E) $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2)$.

8. Soit f la fonction définie sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & \dfrac{\pi + x}{2} & \text{si } x \in [-\pi\ ;\ 0[\\ f(x) & = & \dfrac{\pi - x}{2} & \text{si } x \in [0\ ;\ \pi[. \end{array}\right.$$

Alors :

(A) f est continue sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.
(B) f est dérivable sur $[-\pi\ ;\ \pi]$
(C) La valeur moyenne de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ est $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.
(E) La valeur moyenne de f sur $[-\pi\ ;\ \pi]$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

9. Soit $f(t) = \dfrac{t+2}{t+1}$ et $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ on a :

(A) $I \geqslant 1$.
(B) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$.
(C) $I = 1 + \ln 2$.
(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}*$ et $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $\quad \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k+1}{n}\right) \leqslant \displaystyle\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
(E) $\left[\dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{2}{n}\right) + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{3}{n}\right) + \dots + \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right] \leqslant I$.

10. Soit z et z' les deux nombres complexes $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z' = (1+\mathrm{i})z$.

(A) $z' = \left(\sqrt{3}+1\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)$.
(B) $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$.
(C) $\left|z'\right| = \sqrt{2}|z|$.
(D) $z'\ 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$.
(E) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

11. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\mathrm{P}(3\ ;\ -1;5)\mathrm{Q}(-2\ ;\ 2;3)\mathrm{R}(-1\ ;\ -2;4)\ \text{et}\ \mathrm{S}(5\ ;\ 8;4).$$

(A) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ sont colinéaires.
(B) Les points P, Q et R sont alignés.
(C) Le triangle PQR est isocèle en R.
(D) Les plans (PQR) et (PQS) sont confondus.
(E) $\overrightarrow{\mathrm{PS}} = -3\overrightarrow{\mathrm{PR}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$.

12. Soit f la fonction définie sur $[0;\ 3]$ par $f(x) = \dfrac{1}{9}x + \dfrac{1}{6}$. On note X la variable aléatoire sur $[0;\ 3]$ dont la loi de probabilité a pour densité f.

(A) $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
(B) $P(X \geqslant 2) = \dfrac{7}{36}$.
(C) $p(X \leqslant 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
(D) $P(1 \leqslant X \leqslant 2) \leqslant P(X \geqslant 2)$.
(E) $P(X \geqslant 1)\ P(X \geqslant 2)$

13. Dans un restaurant sans réservation, on modélise le temps d'attente en minutes pour obtenir une table par une variable aléatoire X.
X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Une étude statistique a montré que le temps moyen d'attente est de 10 min.

(A) $\lambda = 10$.
(B) $\dfrac{1}{\lambda} = 10$.
(C) La probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 min est $\displaystyle\int_{10}^{20} \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\,\mathrm{d}x$.
(D) La probabilité qu'un client attende plus de 20 min est $1 - \displaystyle\int_{0}^{20} 10\mathrm{e}^{-10x}\,\mathrm{d}x$.
(E) Un client attend depuis 10min. La probabilité qu'il doive attendre encore au moins 20 min est égale à la probabilité qu'il attende plus de 20min

14. On considère l'algorithme suivant dans lequel *rand*(1,7) donne un nombre entier aléatoire entre 1 et 7.

Variables	i , j, k entiers naturels
Initialisation	$i \leftarrow 1$, $k \leftarrow 0$
Traitement	Tant que $i < 6$
	$j \leftarrow$ *rand* (1,7)
	Si $j > 4$ alors
	$k \leftarrow k + 1$
	Fin Si
	$i \leftarrow i + 1$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher k

(A) k est affiché lorsque j a été affecté 6 fois.
(B) La valeur affichée de k est un entier inférieur à 4.
(C) La probabilité que $k = 0$ est égale à $\dfrac{4}{7}$.
(D) La probabilité que $k = 3$ est égale à $4\left(\dfrac{4}{7}\right)\left(\dfrac{3}{7}\right)^4$.
(E) La probabilité que $k = 4$ est égale à $\left(\dfrac{3}{7}\right)^5$.

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE l'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	A	B	C	D	E
1	V	F	V	V	V
2	V	V	V	V	V
3	V	F	V	V	V
4	V	V	V	V	V
5	F	V	V	V	V
6	V	F	F	F	F
7	V	F	F	V	V
8	V	F	V	V	V
9	V	V	V	V	V
10	V	F	V	V	V
11	F	F	V	V	V
12	V	F	F	V	F
13	F	V	V	F	F
14	F	F	F	F	V