Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA–SUP biotech

6 mai 2017 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  - Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  - Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  - Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

---

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x+1) = 2$

(B) $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x^2\right) = 1$

(C) $\lim\limits_{z\to 1} f(z-1) = 1$

(D) $\lim\limits_{t\to +\infty} f\left(\dfrac{1}{t}\right) = 1$

(E) $\lim\limits_{x\to 3} f\left(u^2-2u-3\right) = 0$

---

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

(A) $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2$

(B) $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 1 \geqslant 0$

(C) $\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x/2}$

(D) Si $x > 0$, $\mathrm{e}^{x\ln(x)} = x^x$

(E) Si $x < 0$, $\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{-x} < 0$

3. Soit f la fonction dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ définie par $f(x) = x\ln(x) - x$.

(A) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0$

(B) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(C) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \ln(x)$

(D) f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

(E) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$

---

4. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$.

(A) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(B) $f(1) > 0$

(C) Il existe $x \in]0\,;\,1[$ tel que $f(x) = 0$

(D) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$

(E) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant 1$

---

5. Soit B un ensemble de 100 boules qui sont, d'une part, soit rouge soit noire ; d'autre part, soit en verre, soit en plastique.

On considère les 2 énoncés suivants :

P : « Toute boule rouge est en verre »

Q : « Il existe une boule noire et en verre »

(A) Pour prouver que P est faux, il suffit de trouver une boule rouge et en plastique

(B) Pour prouver que P est faux, il est nécessaire de trouver une boule rouge et en plastique

(C) Pour prouver que P est vrai, il est nécessaire de vérifier que toutes les boules noires sont en plastique

(D) Si Q est vrai alors P est faux

(E) Si P est faux alors Q est vrai

---

6. Soit f une fonction définie sur $[0;2]$, on considère les deux énoncés suivants :

$$P : \text{Pour tout } x \in [0\,;\,2],\ f(x) \neq 0$$

$$Q : f \text{ n'est pas positive sur } [0;2]$$

(A) P signifie : f est strictement positive sur [0,2] ou strictement négative sur [0,2]

(B) P signifie : Pour tout $x \in [0\,;\,2]$, $f(x) < 0$ ou $f(x) > 0$

(C) Q signifie : f est négative sur $[0;2]$

(D) La négation de P peut s'écrire : f est la fonction nulle sur $[0;2]$

(E) La négation de Q peut s'écrire : f n'est pas négative sur $[0;2]$

Questions à choisir

---

7. Soit f une fonction dérivable sur [-1,1], paire et vérifiant : pour tout $x \in [0\,;\,1]$, $x^6 \leqslant f(x) \leqslant x^2$.

(A) Pour tout $x \in [-1\,;\,0]$, $x^6 \leqslant f(x) \leqslant x^2$

(B) $f(0) = 0$

(C) $f'(0) = 0$

(D) f' est impaire

(E) Pour tout $x \in [0\,;\,1], 6x^5 \leqslant f'(x) \leqslant 2x$

---

8. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}$.

(A) (u_n) est une suite géométrique

(B) (u_n) est décroissante

(C) (u_n) est convergente

(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

(E) $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n = 1$

9.

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

(D) $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2 - 1$

(E) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d} = \frac{1}{2}$

10. Pour un nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ désigne sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

(A) $\mathrm{Re}\left((1+\mathrm{i})^4\right) = 4\,\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})$

(B) $\arg\left((1+\mathrm{i})^4\right) = 4\arg(1+\mathrm{i})$ modulo 2π

(C) $\mathrm{Im}\left((-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3\right) = 3\,\mathrm{Im}\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$

(D) $\left|(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3\right| = 3\left|-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right|$

(E) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3} = -\dfrac{1}{2}$

---

11. Un paquet de 10 cartes à jouer comprend 4 as, 3 rois et 3 dames. Le tirage d'un as rapporte 5 points, celui d'un roi 2 points tandis que celui d'une dame coûte 1 point. On tire simultanément 2 cartes et on note X le nombre total de points.

(A) $P(X=7) = \dfrac{4}{15}$

(B) $P(X=4) = \dfrac{4}{15}$

(C) $P(X=6) = \dfrac{4}{15}$

(D) $P(X<0) = \dfrac{1}{15}$

(E) $P(X \geqslant 1) = \dfrac{14}{15}$

---

12. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on considère la droite Δ d'équation $x-2y+4=0$, les points $\mathrm{I}(1\,;0)$, $\mathrm{J}(-1\,;\,4)$ et $\mathrm{H}(0\,;2)$.

(A) La droite (IH) est orthogonale à Δ

(B) Les points I, J et H sont alignés

(C) La droite (JH) est orthogonale à Δ

(D) La droite orthogonale à Δ passant par I a pour équation $-x+2y+1=0$

(E) Δ est la médiatrice du segment [IJ]

---

13. Pour tous les entiers naturels n et p, strictement positifs

(A) n^2 pair équivaut à n pair

(B) n^2+p^2 pair équivaut à $n+p$ pair

(C) Si np est impair alors $n+p$ est impair

(D) Si np est impair alors n^2+np+p^2 est impair

(E) Si n^2+np+p^2 est pair alors n et p sont pairs

14. On sait que la fonction $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{\sqrt{x}}$ est strictement décroissante sur $\left[e^4\ ;\ +\infty\right[$, et que $e^4 \approx 54,598$.

On programme l'algorithme suivant :

Variable :	n entier naturel
Initialisation :	$n \leftarrow 2$
Traitement :	Tant que $\dfrac{(\ln(n))^2}{\sqrt{n}} \geqslant 1$
	$\quad n \leftarrow n+1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

Le programme affiche 5 504.

On peut alors affirmer

(A) Pour tout $x \in]5504\ ;\ +\infty[,\ f(x) \geqslant 1$

(B) $f(5504) < 1$

(C) Il existe $x \in [5503\ ;\ 5504],\ (\ln(x))^2 = \sqrt{x}$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 1$ **(E)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	A	B	C	D	E
1	F	V	V	V	F
2	F	V	V	V	F
3	V	F	V	F	F
4	V	V	V	F	F
5	V	V	F	F	F
6	F	V	F	F	F
7	V	V	V	V	F
8	F	V	V	V	F
9	V	V	F	F	V
10	F	V	F	F	V
11	V	F	F	V	V
12	V	V	V	F	V
13	V	V	F	V	V
14	F	V	V	V	V