Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

5 mai 2018 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

1.

- **(A)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3} = +\infty$
- **(B)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- **(C)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-1}{x^2} = -\infty$
- **(D)** $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \mathrm{e}$
- **(E)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

2.

- **(A)** Si $f(x) = -3x^4+2x^2+1$ alors $f'(x) = -12x^3+4x+1$
- **(B)** Si $f(x) = 2x^3+x+\dfrac{4}{x^2}$ alors $f'(x) = 6x^2+1+\dfrac{4}{x^3}$
- **(C)** Si $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x1}$ alors $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$
- **(D)** Si $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}$ alors $f'(x) = \dfrac{1-x\ln(x)}{x\mathrm{e}^x}$
- **(E)** Si $f(x) = \cos^2(x)$ alors $f'(x) = -\sin(2x)$

3. Soit f la fonction dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ définie par $f(x) = x - \ln\left(x^2\right)$.
On donne $\ln(2) \approx 0,69$.

- **(A)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$
- **(B)** $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- **(C)** f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
- **(D)** $f'(1) = 0$
- **(E)** Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$

4. Soit f la fonction dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{x+\ln(x)}$.

- **(A)** $f(1) = \mathrm{e}$
- **(B)** Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = \mathrm{e}^x + x$
- **(C)** f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
- **(D)** Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$
- **(E)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$

5. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 3}{\mathrm{e}^x - 1}$.

- **(A)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- **(B)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- **(C)** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$
- **(D)** Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'(x) = \frac{2}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$
- **(E)** f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

6. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ On considère que les trois énoncés suivants sont vrais :

P_1 : Si $f(0) = 1$ et $f(1) \neq 2$ alors $f(2) = 3$

P_2 : Si $f(2) = 3$ ou $f(3) \neq 4$ alors $f(0) \neq 1$

P_3 : Si $f(1) = 2$ alors $f(3) \neq 4$

- **(A)** P_2 est équivalent à : Si $f(0) = 1$ alors $f(2) \neq 3$ ou $f(3) = 4$
- **(B)** Si $f(0) = 1$ alors $f(2) \neq 3$
- **(C)** On peut avoir $f(0) = 1$ et $f(1) \neq 2$
- **(D)** On peut avoir $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$
- **(E)** On peut affirmer que $f(0) \neq 1$

Questions à choisir

7. Soit $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

- **(A)** Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = S_n - 1$
- **(B)** Pour tout $n \geqslant 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k = qS_n - 1$
- **(C)** Si $q = 1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = n$
- **(D)** Si $q = -1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 0$
- **(E)** Si $q \in -1\,;\,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$

8. Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

- **(A)** (u_n) est une suite géométrique
- **(B)** (u_n) est croissante
- **(C)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$
- **(D)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$
- **(E)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

9.

- **(A)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}x = 1$
- **(B)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$
- **(C)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \, \mathrm{d}x = 1 - \sqrt{2}$
- **(D)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(x)\right) \mathrm{d}x = 1$
- **(E)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \, \mathrm{d}x = 1$

10. Pour un nombre complexe z, $\mathrm{Re}(z)$ désigne sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire.
Soit S l'ensemble des solutions de l'équation complexe : $z + |z| = 1 + 2\mathrm{i}$.

- **(A)** Si $z \in S$ alors $z \neq \mathbb{R}$
- **(B)** Si $z \in S$ alors $\mathrm{Im}(z) = 2$
- **(C)** Si $z \in S$ alors $|z| \geqslant 2$
- **(D)** Si $z \in S$ alors $\mathrm{Re}(z) \geqslant -1$
- **(E)** $S = \{-1 + 2\mathrm{i}\}$

11.

- **(A)** $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ est imaginaire pur
- **(B)** $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$ est imaginaire pur
- **(C)** $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$ est réel
- **(D)** $\left|\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right| = 1$
- **(E)** $\left|\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}\right| = 1$

12. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$I(3 ; -2 ; 2), J(6 ; 1 ; 5), K(6 ; -2 ; -1) \text{ et } L(0 ; 4 ; -1).$$

- **(A)** $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = 0$
- **(B)** Le triangle (IJK) est rectangle
- **(C)** $KL^2 = KI^2 + IL^2$
- **(D)** Le triangle (IKL) est rectangle
- **(E)** Le triangle (IJL) est rectangle

13. La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note f la fonction densité associée à T et on rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

- **(A)** $P(T \leqslant 5) = \lambda\left(1 - e^{-5\lambda}\right)$
- **(B)** Si $P(T \leqslant 5) = 0,9$ alors $\lambda = \dfrac{\ln(10)}{5}$
- **(C)** La probabilité que le composant ne fonctionne plus au bout de 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est $P(2 \leqslant T \leqslant 5)$
- **(D)** La probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure à 5 ans, sachant qu'il fonctionne depuis 2 ans, est $\dfrac{P(T \geqslant 5)}{P(T \geqslant 2)}$
- **(E)** Si l'espérance de T est 5 alors $\lambda = 5$

14. Soit la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$, qui a 3 racines réelles dans $]-2 ; 2[$ dont une seule dans $]1 ; 2[$. On note α la racine dans $]1 ; 2[$. Pour avoir une valeur approchée de α on utilise l'algorithme suivant :

```
Entrées :     Donner les valeurs de a, b, N
Variables :   x réel, i entier
Traitement :  Pour i allant de 1 à N
                 x ← a − (b − a)/(f(b) − f(a)) f(a)
                 Si f(a)f(x) > 0
                    a ← x
                 Sinon
                    b ← x
                 Fin Si
              Fin Pour
Sortie :      Afficher x
```

- **(A)** L'algorithme est basé sur le théorème des valeurs intermédiaires.
- **(B)** Dans l'algorithme, x est l'abscisse du point intersection d'une droite avec l'axe des abscisses.
- **(C)** Pour obtenir une valeur approchée de α, on peut donner en entrées pour a et b : $a = 0$ et $b = 2$.
- **(D)** Les entrées ($a = 1$, $b = 2$, $N = 10$) et ($a = 2$, $b = 1$, $N = 10$) donneront la même sortie.
- **(E)** On peut remplacer la boucle « Pour i allant de 1 à N » par une boucle conditionnelle « Tant que $(b - a) > 10^{-N}$ ».

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	A	B	C	D	E
1	F	V	V	V	F
2	F	F	V	V	V
3	V	V	F	F	V
4	V	F	V	V	F
5	V	F	V	F	V
6	F	V	F	F	V
7	V	V	F	F	V
8	F	F	V	F	V
9	F	V	F	V	F
10	V	V	V	F	F
11	F	V	F	V	V
12	V	V	V	V	V
13	F	V	F	V	F
14	V	V	F	V	V