Durée : 1 heure 30

Épreuves communes ENI–GEIPI–POLYTECH
Série S 11 mai 2016

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1 h 30.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.
Les réponses aux questions seront à écrire au stylo et uniquement dans les cadres des documents réponses prévues à cet effet.
Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit.
Aucun document n'est autorisé.
L'usage d'un téléphone ou de tout objet communiquant est interdit.
Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.
Chaque exercice est noté sur 20 points. Le sujet est donc noté sur 60 points.
Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 2 à 9
Il faut choisir et réaliser seulement trois des quatre exercices proposés

EXERCICE 1

Partie A

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = \mathrm{e}^x - x.$$

1. g' désigne la dérivée de g. Donner, pour tout réel x, $g'(x)$.
2. Donner l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $g'(x) \geqslant 0$.
   Justifier la réponse.
3. Dresser le tableau des variations de g.
   (les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).
4. Justifier que, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

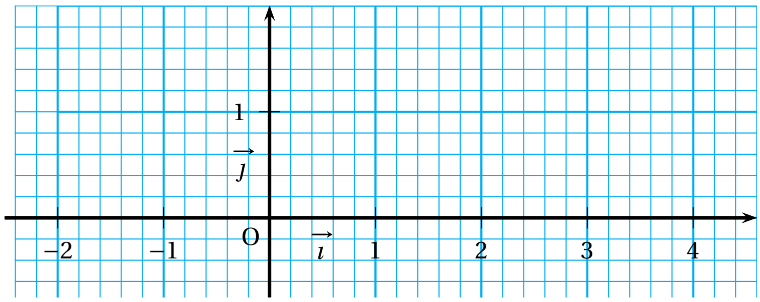
On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   b. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$? En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   c. On en déduit que C admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2.
   Donner une équation de chacune d'elles.
2. f' désigne la dérivée de f. Justifier que, pour tout réel x,
$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}.$$
3. **a.** Dresser le tableau des variations de f.

b. f présente un maximum y_M atteint en x_M. Donner les valeurs exactes de x_M et y_M, puis une valeur approchée de y_M à 10^{-1} près.
Dans la suite, on note M le point de coordonnées $\left(x_M\ ;\ y_M\right)$.

4. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 0.
Donner une équation de la tangente à C en A.

5. Placer les points A et M. Tracer les tangentes à la courbe C aux points A et M et les asymptotes Δ_1 et Δ_2. Puis tracer C.



6. f admet sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ un minimum a et un maximum b.
Donner les valeurs exactes de a et b.

7. On considère l'intégrale : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Hachurer, sur la figure de la question 5, le domaine dont l'aire, en unités d'aire, vaut J.

b. En utilisant la question 6, justifier que : $1 \leqslant J \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$.

EXERCICE 2

Une chocolaterie fabrique deux sortes de chocolats : des chocolats noirs et des chocolats au lait.
60 % des chocolats fabriqués sont noirs. Parmi ceux-ci, 70 % sont fourrés, tandis que 30 % seulement des chocolats au lait sont fourrés.

Partie A

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte

Un client fait une dégustation de chocolats et il en choisit un au hasard.
On considère les évènements suivants :

N : « le chocolat choisi est noir »

F : « le chocolat choisi est fourré ».

1. Donner la probabilité P_1 que le chocolat choisi soit noir.

2. Déterminer la probabilité P_2 que le chocolat choisi soit noir et fourré.
Justifier la réponse.

3. On note P_3 la probabilité que le chocolat choisi soit fourré.
Justifier que $P_3 = 0,54$.

Partie B

Un client achète une boîte de n chocolats, où n est un entier naturel non nul.
Chaque chocolat mis dans la boîte est choisi au hasard et on suppose le nombre de chocolats suffisamment grand pour que l'on puisse considérer que les choix successifs sont faits de façon identique et indépendante.
On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de chocolats fourrés contenus dans la boîte.

1. X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. **Dans cette question n = 12 et, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.**
   a. Donner la probabilité P_4 que la moitié des chocolats de la boîte soient fourrés.
   b. Donner la probabilité P_5 que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.
   c. Donner la probabilité P_6 que la boîte contienne au plus trois chocolats fourrés.
3. **Dans cette question, n est quelconque.**
   a. Donner, en fonction de n, la probabilité q_n que la boîte contienne au moins un chocolat fourré.
   b. Déterminer le nombre minimum n_0 de chocolats que doit acheter le client afin que la probabilité que la boîte contienne au moins un chocolat fourré soit strictement supérieure à 0,98. Détailler les calculs.

Partie C

Dans cette partie, pour chaque probabilité demandée, on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près.
Une étude a montré que la variable aléatoire représentant le poids, exprimé en grammes, d'un chocolat choisi au hasard dans l'ensemble de la production suit une loi normale d'espérance $m = 15$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
Le service qualité effectue un contrôle et choisit au hasard un chocolat dans l'ensemble de la production.

1. Donner la probabilité P_7 que le chocolat choisi pèse plus de 17 grammes.
2. Donner la probabilité P_8 que le chocolat choisi pèse moins de 13 grammes.
3. Donner la probabilité P_9 que le chocolat choisi pèse entre 12 et 18 grammes.

EXERCICE 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_\text{A} = 1$, $z_\text{B} = 1 + \text{i}$ et $z_\text{C} = \text{i}$.
Soit x un réel appartenant à $]0\,;1[$.
On nomme :

- M le point du segment [AB] d'affixe $z_M = 1 + x\text{i}$;
- N le point du segment [BC] d'affixe $z_N = x + \text{i}$.

Posons $Z = \dfrac{z_N}{z_M}$.

Partie A

1. Sur la figure, le point M a été placé pour une certaine valeur du réel x.
   Tracer le carré OABC et le triangle OMN.
2. Exprimer, en fonction de x, les modules $|z_M|$ et $|z_N|$.
3. Le triangle OMN est isocèle. Donner son sommet principal. Justifier la réponse.
4. a. Montrer que la droite (OB) est perpendiculaire à la droite (MN).
   b. En déduire que la droite (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{M\text{O}N}$.
5. Justifier que $|Z| = 1$.
6. Montrer que la forme algébrique de Z est : $Z = \dfrac{2x}{1+x^2} + \text{i}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

7. $\text{Im}(Z)$ désigne la partie imaginaire de Z. Montrer que $\text{Im}(Z) > 0$.

Partie B

Dans cette partie $x = 2 - \sqrt{3}$.

1. Donner la valeur exacte de $1 + x^2$.
2. **a.** $\text{Re}(Z)$ désigne la partie réelle de Z. Montrer que $\text{Re}(Z) = \dfrac{1}{2}$.

   b. On nomme θ un argument de Z.
   En déduire, en utilisant certains résultats de la partie A, la valeur exacte de θ.
   On admet que $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{O}N}\right) = \theta \quad (2\pi)$.
3. **a.** En utilisant la question 4. b., donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}M}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\text{O}M}\right) = \dfrac{\pi}{12} \quad (2\pi)$.
4. **a.** Justifier que $1 + x^2 = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$.

   b. En déduire la valeur exacte de $|z_M|$.
5. Écrire la forme trigonométrique de z_M.
6. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{a}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{b}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$, où a et b sont des réels.
   Donner les valeurs exactes de a et b.

EXERCICE 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

- le point A de coordonnées $(-4 ; 2 ; 1)$;
- la droite $\mathscr{D}_1$ définie par le système d'équations paramétriques :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 7 + k \\ y & = & 6 + k \\ z & = & -3 - k \end{array}\right. \text{, avec } k \in \mathbb{R} ;$$

- la droite $\mathscr{D}_2$ passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\,(1 ; 0 ; 2)$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. Ecrire un système d'équations paramétriques de la droite $\mathscr{D}_2$. On notera t le paramètre.
3. Dans cette question on va montrer que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas coplanaires.

   a. Justifier que les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ne sont pas parallèles.

   b. Montrer que l'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est vide.
4. On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(-2 ; 3 ; 1)$.
   Montrer que $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$ et à $\overrightarrow{u_2}$.
5. Soient B et C les points définis par $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(6 ; 5 ; -3)$. On nomme $\mathscr{P}$ le plan contenant les points A, B et C.

   a. Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   b. $\mathscr{P}$ a donc une équation cartésienne de la forme : $6x + 5y - 3z + d = 0$, où d désigne un réel.
   Montrer que $d = 17$.

6. On nomme E le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite $\mathscr{D}_1$.
Déterminer les coordonnées $\left(x_{\text{E}}\ ;\ y_{\text{E}}\ ;\ z_{\text{E}}\right)$ du point E.

7. Soit Δ la droite passant par E et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

a. Quel est le point d'intersection des droites Δ et $\mathscr{D}_1$?

b. Justifier que les droites Δ et $\mathscr{D}_1$ sont perpendiculaires.

c. Justifier que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

d. En déduire que les droites Δ et $\mathscr{D}_2$ sont perpendiculaires.
En conclusion, on a démontré que la droite Δ est une perpendiculaire commune aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.