CONCOURS PUISSANCE 11 - CORRIGE MATHS 2013

Note du rédacteur : l'intégralité de l'énoncé original est repris dans ce corrigé. La bonne réponse ainsi qu'une justification suivent chaque affirmation :

- *VRAI, lorsque l'affirmation est vraie.*
- *FAUX, lorsque l'affirmation est fausse.*

Le sujet original est disponible sur le site internet de l'APMEP[a] *:* `http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/FESIC_18_mai_2013.pdf`.

[a]Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Exercice 1 - Bases en analyse

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a. La dérivée de $x \mapsto xe^x$ est $x \mapsto e^x$.
FAUX. Soit $f : x \mapsto xe^x$, définie sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-1}{x} = +\infty$.
FAUX. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 - 0 = 0$.

c. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.
FAUX. Si $f' = f'$, alors f est une fonction exponentielle.

d. Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire tels que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,7$. Alors, A et B sont indépendants.
VRAI. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc $P(A \cap B) = 0$, et donc par définition A et B sont incompatibles.

Exercice 2 - Bases en géométrie

Pour le **a.** et **b.**, on se place dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Les questions **a.** et **b.** sont indépendantes.

a. Si $z = -6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors $\arg(z) = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
FAUX. En effet $-6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ n'est pas une forme trigonométrique de z car $-6 < 0$. Or $-1 = e^{-i\pi/2}$ d'où $z = -6e^{2i\pi/3} = 6e^{-i\pi/2}e^{2i\pi/3} = 6e^{\pi/6}$, donc $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

b. Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M' un point d'affixe $z' = -\bar{z}$, alors M et M' sont symétriques par rapport à O.
FAUX. Avec $z = x + iy$, on a $-\bar{z} = -x + iy$, donc et M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{v})$.

Pour le **c.** et le **d.**, on se place dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x + 6y - 10z + 3 = 0$ et $-6x - 9y + 15z - 8 = 0$.

Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = 5t - 1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

c. $(P1)$ et $(P2)$ sont sécants.
FAUX. Un vecteur directeur de (P_1) est $\vec{n}_1 = (4, 6, -10)$ et un vecteur directeur de (P_2) est $\vec{n}_2 = (-6, -9, 15)$. On voit que $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires. Par conséquent (P_1) et (P_2) sont parallèles ou confondus, mais pas sécants.

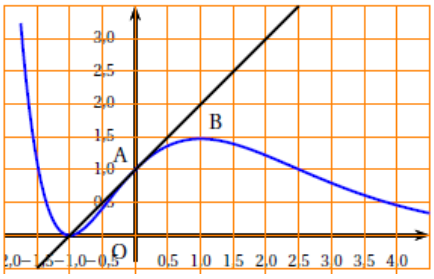
d. Le point $A(2; 3; -5)$ appartient à la droite (d).
FAUX. Si $A \in (d), \exists t \in \mathbb{R}$ t.q. : $\begin{cases} 2 = 2t + 1 \\ 3 = -t - 3 \\ -5 = 5t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/2 \\ t = -6 \\ t = -4/5 \end{cases}$ donc $A \notin (d)$.

Exercice 3 - Lecture graphique

On considère la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées $(0; 1)$.

a. $f'(0) = 1$.
FAUX. La tangente au point $(0; f(0))$ n'est pas horizontale.

b. $f'(1) = 1,5$.
FAUX. La tangente au point $(0; f(0))$ est horizontale donc $f'(1) = 0$.

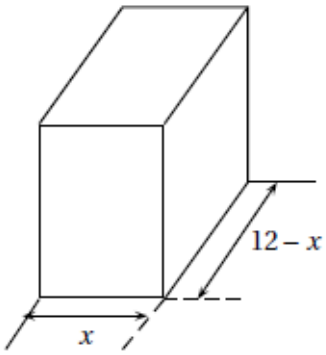


c. L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur l'intervalle $[-1,5; 4]$.
FAUX. Sur le graphique ci-contre, on voit qu'il y a un point d'intersection entre (C) et la droite d'équation $(y = x)$ en $x = -1$ et en A.

d. $2 \leq \int_{-1}^{2} f(x)dx \leq 4$.
VRAI. L'aire est minorée par 11 petits carreaux ($\geq$ 2 u.a.) et majorée par 15 petits carreaux ($\leq$ 4 u.a.).

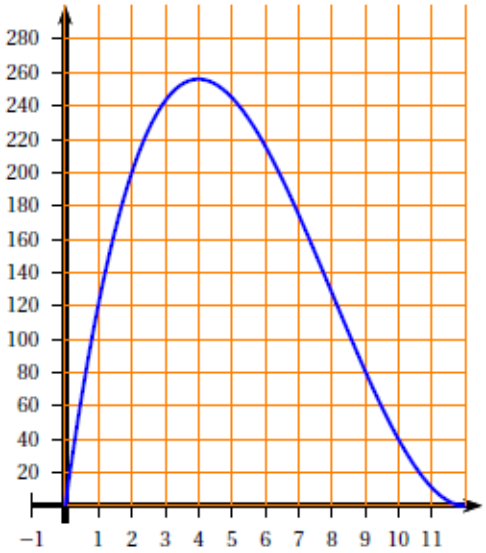
Exercice 4 - Volume d'un parallélépipède rectangle

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur.
On suppose $x \in [0; 12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).



a. Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = (-12x + x)^2(x - 12)$.
FAUX. $V(x) = x(12 - x)^2$.

On pose f la fonction définie sur $[0; 12]$ par $f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$ de courbe représentative (C) ci-contre.



b. Pour tout x appartenant à $[0; 12]$, $f'(x) > 0$.
FAUX. Pour $x \geq 4$, les pentes des tangentes sont négatives donc $f'(x) \leq 0$.

c. $V(x) = 2f(x)$.
FAUX. $V(x) = x(12 - x)^2 = 144x - 24x^2 + x^3 = f(x)$.

d. Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3.
VRAI. Si le parallélépipède est un cube, alors $x = 12 - x$, d'où $x = 6$ dm, et $V(6) = 216$ dm^3.

Exercice 5 - Utilisation d'une suite dans un algorithme

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1.$$

On donne l'algorithme suivant :

Entrée	n est un entier naturel.
Initialisation	u prend la valeur 1 ; i prend la valeur 0.
Traitement	Tant que $i < n$ u prend la valeur $\frac{1}{2}(u-i)-1$ i prend la valeur $i+1$ Fin Tant que.
Sortie	Afficher u.

a. Pour $n = 3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	-1/2	1
3	-7/4	2
3	-23/4	3

FAUX. $u_3 = -23/8$.

b. Pour $n = 3$, l'algorithme calcule u_3.
VRAI. Plus précisément, il calcule tous les termes jusqu'à u_3 et affiche ce dernier.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + n$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.
VRAI. $v_{n+1} = u_{n+1} + (n+1) = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1 + n + 1 = \frac{1}{2}(u_n + n) = \frac{1}{2}v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = u_0 + 0 = 1$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2^n} + n$.
FAUX. Comme v_n est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$, d'où $u_n = v_n - n = \frac{1}{2^n} - n$.

Exercice 6 - Utilisation d'un algorithme avec des nombres complexes

On se place dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	θ, a, b, a', b' sont des nombres réels.
Traitement	a' prend la valeur $a \times \cos(\theta)$ a' prend la valeur $a' - b \times \sin(\theta)$ b' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$ b' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$
Sortie	Afficher a'. Afficher b'.

Pour le **a.** et le **b.** on suppose $\theta = \pi/3$, $a = 1$ et $b = 1.3$.

a. $a' = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
FAUX. $a' = \dfrac{1.3\sqrt{3}-1}{2}$.

b. $b' = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.
FAUX. $b' = \dfrac{\sqrt{3}+1.3}{2}$.

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a + ib$ et M' le point d'affixe $z' = a' + ib'$ avec a' et b' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c. Si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$ alors $|z'| = \sqrt{2}$.
VRAI. $a' = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $b' = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, d'où $z' = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ et donc
$|z|^2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2$, d'où $|z| = \sqrt{2}$.

d. Dans le cas général ou $\theta \in \mathbb{R}$, $z' = e^{i\theta}z$.
VRAI. En effet, d'une part $z' = (a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) + i(a\sin(\theta) + b\cos(\theta))$, et d'autre part : $e^{i\theta}z = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(a + ib) = (a\cos(\theta) - b\sin(\theta)) + i(a\sin(\theta) + b\cos(\theta))$, donc $z' = e^{i\theta}z$.

Exercice 7 - Bases de logique

Pour le **a.** et le **b.** on suppose que z est un nombre complexe et Γ est sous ensemble de $\mathbb{C}$.

a. $z \neq 0$ si et seulement si $\Re(z) \neq 0$ et $\Im(z) \neq 0$.
FAUX. $z \neq 0$ si et seulement si $\Re(z) \neq 0$ OU $\Im(z) \neq 0$.

b. La contraposée de la proposition "si $z \in \Gamma$ alors $\Re(z) = 0$" est "si $\Re(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$".

FAUX. La contraposée est "si $\Re(z) \neq 0$ alors $z \notin \Gamma$".

Pour le **c.** et le **d.** on suppose que f est une fonction définie sur $I = [-3; 5]$.

c. Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.
FAUX. Les hypothèses sont insuffisantes : f doit être continue sur I.

d. Si f admet une primitive sur $I = [-3; 5]$ alors f est continue sur I.
FAUX. C'est l'inverse qui est vrai : "Si f est continue sur I alors elle admet des primitives sur I."

Exercice 8 - Calculs de limites

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = -\infty$.
FAUX. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$.
FAUX. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$.

c. Si, pour tout réel x non nul, $\dfrac{x-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
FAUX. Contre-exemple avec $f(x) = 1$, pour tout réel x non nul.

d. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(x) - 1}{x - \pi/2} = 1$.
FAUX. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x)$, d'où $-2 \leq \sin(x) - 1$. Or $\forall x < \dfrac{\pi}{2}$, $x - \dfrac{\pi}{2} < 0$, d'où $\dfrac{\sin(x) - 1}{x - \pi/2} \leq -\dfrac{2}{x - \pi/2}$.
Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{x - \pi/2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(x) - 1}{x - \pi/2} = 0$.

Exercice 9 - Calculs d'intégrales

a. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4 + 2\sqrt{2}$.
FAUX. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_2^4 = 4 - 2\sqrt{2}$

b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln 2$.
FAUX. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln(1+x^2)]_0^1 = \ln(2)$.

c. La fonction $x \mapsto (x^2-2x+2)e^x-2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2e^x$.
VRAI. Soit $f : x \mapsto (x^2-2x+2)e^x-2$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x+2)e^x = x^2e^x$.

d. $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x = 3e-2$.
FAUX. D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto (x^2-2x+2)e^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^2e^x$ donc $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x = [(x^2-2x+2)e^x]_0^1 = e-2$.

Exercice 10 - Notions de base sur les nombres complexes

On se place ici dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère A le point d'affixe $z_A = -2i$, B le point d'affixe $z_B = -2$ et E le point d'affixe $z_E = 2+2i\sqrt{3}$.

a. L'écriture trigonométrique de $z_E = 2+2i\sqrt{3}$ est $4e^{i\frac{\pi}{3}}$.
VRAI. $z_E = 2+2i\sqrt{3} = 4\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. E est situé sur le cercle trigonométrique de centre O et de rayon $R=2$.
FAUX. $|z_E| = 4$, donc $OE = 4 \neq 2$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+2i| = |2+z|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
VRAI. $|z+2i| = |2+z| \iff |z-(-2i)| = |z-(-2)| \iff |z-z_A| = |z-z_B| \iff AM = BM$, donc M appartient à la médiatrice de $[AB]$.

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2\bar{z}z = 1$ est un cercle de rayon 2.
FAUX. $2\bar{z}z = 1 \iff 2|z|^2 = 1 \iff |z|^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \neq 2$.

Exercice 11 - Utilisation des complexes en géométrie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation du plan complexe qui, a tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'affixe $z' = 1+\dfrac{i}{z}$.

a. L'image par f du point A d'affixe $z_A = 1+i$ est le point A' d'affixe $z'_A = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.
VRAI. $z'_A = 1+\dfrac{i}{1+i} = 1+\dfrac{i(1-i)}{2} = \dfrac{2+i+1}{2} = \dfrac{3+i}{2} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

Dans toute la suite, on pose $z = x+iy$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z' = x'+iy'$ avec x', y' réels.

b. $\Re(z') = x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$
VRAI.

$$\begin{aligned} z' &= 1 + \frac{i}{x+iy} \\ &= \frac{x+i(y+1)}{x+iy} \\ &= \frac{[x+i(y+1)][x-iy]}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x^2+y(y+1)}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Donc $x' = \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2}$.

c. $\Im(z') = y' = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$
FAUX. D'après ce qui précède $y' = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

d. L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre $A(0; -\frac{1}{2})$ et de rayon $R = \frac{1}{2}$, privé du point O.
VRAI. $\forall z = x+iy \neq 0 : \ x' = 0 \iff \dfrac{x^2+y^2+y}{x^2+y^2} = 0 \iff x^2+y^2+y = 0 \iff x^2 + (y+\dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{1}{4} = 0 \iff x^2 + (y-(-\dfrac{1}{2}))^2 = \dfrac{1}{4}$. Donc $M \in (C)$, privé de O.

Exercice 12 - Etude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1-x^2)$. On note D l'ensemble de définition de f.

a. $1-x^2 > 0$ si et seulement si $-1 < x < 1$.
VRAI. $1-x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$.

b. $D = [-1, 1]$
VRAI. f est définie pour tout x réel tel que $1-x^2 > 0$, donc d'après ce qui précède $D = [-1, 1]$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
FAUX. $f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$.

d. L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{e-1}$ et $x = -\sqrt{e-1}$.
FAUX. $f(x) = 1 \iff \ln(1-x^2) = 1 \iff 1-x^2 = e \iff x^2 = 1-e$. Pas de solutions car $1-e < 0$.

Exercice 13 - Etude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2+1}$. On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
FAUX. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2+1 = +\infty$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (pas de forme indéterminée).

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
VRAI. $f(x) = \dfrac{1}{e^{-2x}(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2e^{-2x}+e^{-2x}} = \dfrac{1}{(xe^{-x})^2+(e^{-x})^2}$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -Xe^X = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0^+$, donc, par somme et inverse de limite : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{2(x^2-x+1)}{(e^{-x}(x^2+1))^2}$.
VRAI.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^{2x}(x^2+1) - e^{2x}\times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x}(x^2+1-x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-x+1)}{e^{-2x}(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2(x^2-x+1)}{(e^{-x}(x^2+1))^2} \end{aligned}$$

d. f est croissante sur $]-\infty;0]$ et decroissante sur $[0;+\infty[$.
FAUX. f' est du signe de x^2-x+1, trinôme de discriminant négatif ($\Delta = -3$), donc du signe de $a = 1$ positif. Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 - Bases en probabilités

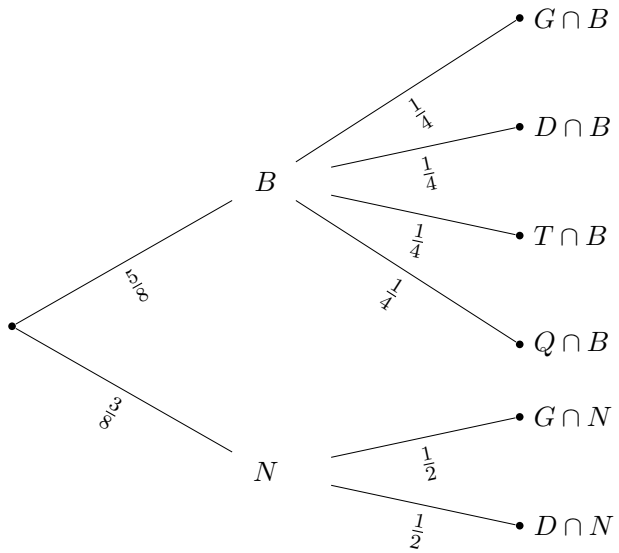
On considère, dans **a.**, deux évènements E et F d'une même expérience aléatoire.

a. $P_{\overline{F}}(E) = 1 - P_F(E)$.
FAUX. D'après la formule des probabilités totales $P_{\overline{F}}(E) + P_F(E) = P(E)$ non nécessairement égal à 1.

Pour les questions **b.**, **c.** et **d.**, nous utiliserons les hypothèses suivantes : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne. Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition. Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition. On considère les évènements suivants : G : « Le joueur obtient le numéro 1 » ; B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b. $P(B \cap G) = \dfrac{5}{32}$.

VRAI. Soient D : « Le joueur obtient le numéro 2 », T : « Le joueur obtient le numéro 3 » et Q : « Le joueur obtient le numéro 4 ». Alors l'arbre de probabilité suivant modélise l'expérience aléatoire :



Alors, $P(B \cap G) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{32}$

c. $P(G) = \dfrac{13}{32}$.

FAUX. $P(G) = P(B \cap G) + P(N \cap G) = \dfrac{5}{32} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{32} + \dfrac{3}{16} = \dfrac{11}{32}$.

d. $P_G(B) = \dfrac{5}{11}$.

VRAI. $P_G(B) = \dfrac{P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{5}{32} \times \dfrac{32}{11} = \dfrac{5}{11}$.

Exercice 15 - Différentes lois de probabiités

a. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0;5]$.
$P\left(1 \leq X \leq \dfrac{5}{2}\right) = 0,4$.
FAUX. $P\left(1 \leq X \leq \dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5/2-1}{5} = \dfrac{3}{10} = 0,3 \neq 0,4$.

b. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $P(Y > c) = e^{-\lambda c}$.
VRAI. Résultat de cours.

c. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{10}$.
$P(T \leq 10) = 1 - \dfrac{1}{e}$.
VRAI. $P(T \leq 10) = 1 - e^{-10\lambda} = 1 - e^{-1}$.

d. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ et vérifiant $P(0 \leq Z \leq 2) = 0,75$. La loi de Z n'est pas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
VRAI. Si $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$, on aurait $P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95$ donc, par symétrie $P(0 \leq Z \leq 1,96) = 0,475$ et par conséquent $P(0 \leq Z \leq 2) \simeq 0,475 \neq 0,75$.

Exercice 16 - Repérage dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y+3z-2=0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t , $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = -3-t \end{cases}$

a. Le point $A(-1;3;-2)$ appartient à D.
VRAI. $A \in D \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -1 = 1+2t \\ 3 = 2-t \\ -2 = -3-t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$

b. Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées $(-3;4;-1)$.
VRAI. Les coordonnées paramétriques d'un point de D sécant avec P vérifient l'équation du plan P, c'est à dire : $1+2t+2(2-t)+3(-3-t)-2=0 \iff t=-2$, d'où, en remplaçant t par -2 dans l'équation paramétrique de D : $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$

c. La droite D', de représentation paramétrique $\begin{cases} x = k \\ y = -2k+1 \\ z = k \end{cases}$ pour tout réel k, est sécante au plan P.

FAUX. Un vecteur directeur de D' est $\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Et $\vec{u}'\cdot\vec{n}=1-4+3=0$. Donc D' est parallèle à P ou incluse dans P. Donc non sécante avec P.

d. Les droites D et D' sont coplanaires.

FAUX. Supposons D et D' sécantes. Alors il existe t réel tel que : $\begin{cases}1+2t=t\\2-t=-2t+1\\-3-t=t\end{cases} \iff \begin{cases}t=-1\\t=-1\\2t=-3\end{cases}$ Ce qui est impossible, donc D et D' sont non sécantes, donc non coplanaires.