Corrigé du bac 2017 : Mathématiques Obligatoire Série S – Métropole

<u>Exercice 1</u>

Partie A

$h(x)=x e^{-x}$

1) On peut écrire h sous la forme : $h(x)=\dfrac{x}{e^{x}}$.

La fonction x croît moins vite de la fonction e^{x} quand $x \to \infty$.
Donc $\lim_{\infty} h(x)=0$ *(on peut le vérifier avec la calculatrice)*

2) Variation de h :
Calcul de la dérivée h’ : $h=uv$ avec $u=x$ et $v=e^{-x}$ et $u' = 1$ et $v' = -e^{-x}$.
$h'=u'v+uv'=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$
h’ s’annule pour x = 1 .

x	0		1		∞
e^{-x}	1	+		+	0
1-x	1	+	0	−	
Signe de h’(x)	1	**+**	0	−	0
Variation de h(x)	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) Primitive de h.
3.a) Vérification : $e^{-x}-h'(x)=e^{-x}-(1-x)e^{-x}=x e^{-x}=h(x)$.

3.b) $\int e^{-x}dx=-e^{-x}$ en effet : $(-e^{-x})'=-(-e^{-x})=e^{-x}$.

3.c) h(x) est la somme de 2 termes dont on connaît les primitives :
$\int h(x)dx=\int e^{-x}dx-\int h'(x)dx=-e^{-x}-h(x)=-e^{-x}-x e^{-x}=-(x+1)e^{-x}$.
Une primitive de h(x) sur $[0;+\infty[$ est $-(x+1)e^{-x}$.
(on vérifie en re-dérivant : $u'v+uv'=-e^{-x}-(x+1)(-e^{-x})=-e^{-x}+x e^{-x}+e^{-x}=x e^{-x}=h(x)$ *)*

Partie B

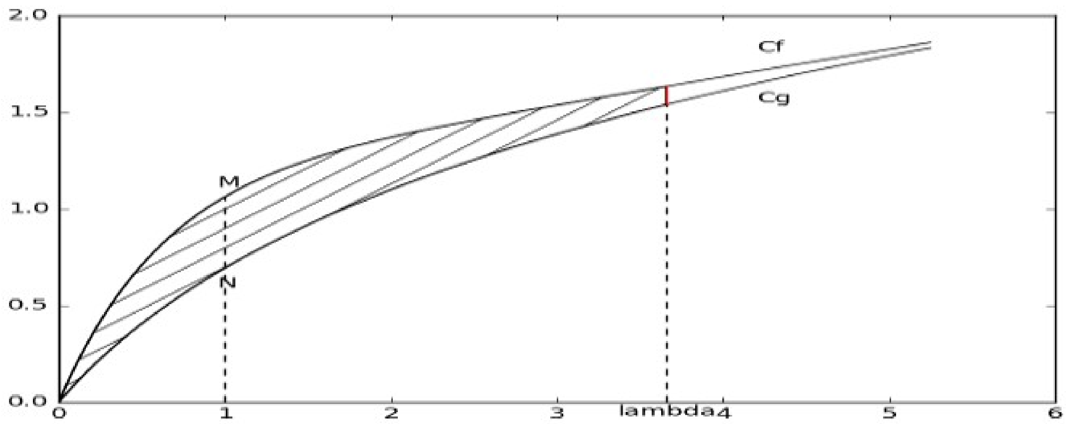
$f(x)=x e^{-x}+\ln(x+1)$ et $g(x)=\ln(x+1)$

1.a) Distance MN : $f(x)-g(x)=x e^{-x}=h(x)$.

La distance MN est maximale pour $x=1$ et vaut $\frac{1}{e}$ (d'après le résultat de la question 2 de la partie A).

1.b) Voir graphique. (*remarque : f(x) – g(x) est maximal quand leurs tangentes sont parallèles).*

2.a) Domaine D_k entre g(x) et f(x) :



2.b) L'aire A_λ est la différence entre l'aire sous la courbe C_f et l'aire sous la courbe C_g :

$A_\lambda=\int_0^\lambda f(x)dx-\int_0^\lambda g(x)dx=\int_0^\lambda f(x)-g(x)dx=\int_0^\lambda h(x)dx$

$A_\lambda=-(\lambda+1)e^{-\lambda}-[-(0+1)e^0]=1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$A_\lambda=1-\frac{(\lambda+1)}{e^\lambda}$

2.c) Quand $\lambda\rightarrow\infty$ la fonction e^λ croît plus vite que $\lambda+1$.

Le quotient $\frac{(\lambda+1)}{e^\lambda}\rightarrow 0$ donc $A_\lambda\rightarrow 1$.

La limite de A_λ est 1.

L'aire entre les deux courbes tend vers l'unité d'aire.

3.a) Initialisation : $S=0{,}8;\lambda=0$.

Premier passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0 < 0{,}8$ on continue la boucle : $\lambda=1$.

Deuxième passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0{,}2642 < 0{,}8$ on continue la boucle : $\lambda=2$.

Troisième passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0{,}5940 < 0{,}8$ on continue la boucle : $\lambda=3$.

Quatrième passage : $1-\frac{\lambda+1}{e^\lambda}=0{,}8009 > 0{,}8$ on sort de la boucle.

Et l'on affiche la valeur de λ qui vaut 3.

3.b) Le rôle de cet algorithme est de déterminer l'intervalle $[0;\lambda]$ à prendre en compte pour obtenir au moins l'aire S entre les courbes f et g.

Exercice 2

1) Le point A n'appartient pas au plan P si ses coordonnées ne satisfont pas l'équation du plan.
Calculons $2x-z-3$ pour $x=1$ et $z=a^2$.
Nous obtenons : $2-a^2-3=-1-a^2 < 0$ qui ne peut jamais être nul, quelque soit a.
Le point A ne peut pas appartenir au plan P.

2.a) Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan $ax+by+cz=d$, elle doit être colinéaire au vecteur normal au plan : $\vec{n}=(a,b,c)$ soit : $\vec{n}=(2,0,-1)$ pour le plan P.
Équation vectorielle de la droite D orthogonale à P : $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+t\vec{n}$.
En décomposant cette équation sur les trois axes de coordonnées :

$$x=1+2t$$
$$y=a$$
$$z=a^2-t$$

2.b) Distance $AM=|t\vec{n}|=|t|\sqrt{2^2+1^2}=|t|\sqrt{5}$.

3) H appartient à la droite D et au plan P : ses coordonnées vérifient les deux systèmes d'équations :

$$2x-z-3=0$$
$$x=1+2t$$
$$y=a$$
$$z=a^2-t$$

En remplaçant x, y, z, dans l'équation du plan : $2(1+2t)-(a^2-t)-3=0$.

Soit : $2+4t-a^2+t-3=0$ on obtient : $t=\dfrac{a^2+1}{5}$.

Donc : $AH=|n||t|=\sqrt{5}\dfrac{a^2+1}{5}$.

AH est minimal pour a = 0 car il est une somme de deux termes positifs.

<u>Exercice 3</u>

Partie A

1) Le rayon du point P est compris dans l'intervalle $[40;60]$
L'angle du point P est compris dans l'intervalle $[45°;90°]=[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}]$

C'est la **proposition C** qui propose un encadrement correct du point P.

2.a) $z=70e^{-i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow r=70\in]60;80[$ et $-\frac{\pi}{2}<\frac{-\pi}{3}<\frac{-\pi}{4}$ z correspond au **secteur G4**.

2.b) $z=-45\sqrt{3}+45i \Rightarrow r=45\sqrt{3+1}=90$ $z=r(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$

$\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$ correspondent à $\theta=\frac{5\pi}{6} \in [\frac{3\pi}{4};\pi]$

z correspond au **secteur D5**.

(remarque : avec la calculatrice, on pouvait convertir z en notation exponentielle)

Partie B

(remarque : arrondi à 10^{-3} près)

1) P(M<0) où M suit une loi normale $N(\mu=50,\sigma=5)$

Calcul à faire à la calculatrice : $P(M<0)=8\times10^{-24}=0$ (après arrondi).

Ce résultat est totalement négligeable car la valeur 0 est à 10 écart-types de la moyenne. C'est tout à fait logique car il est impossible que le module du nombre complexe z soit strictement négative.

(résultat Excel : LOI.NORMALE(0 ; 50 ; 5 ; vrai) = 8e-24)

2) $P(M\in]40;60[)=P(M<60)-P(M<40)=0{,}954$

(résultat Excel : LOI.NORMALE(60 ; 50 ; 5 ; 1) - LOI.NORMALE(40 ; 50 ; 5 ; 1) = 0,95449974 en calculant avec moins de chiffres : 0,954500 , on pouvait aussi arrondir à 0,955)

3) On admet que $P(T\in]\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}[)=0{,}819$

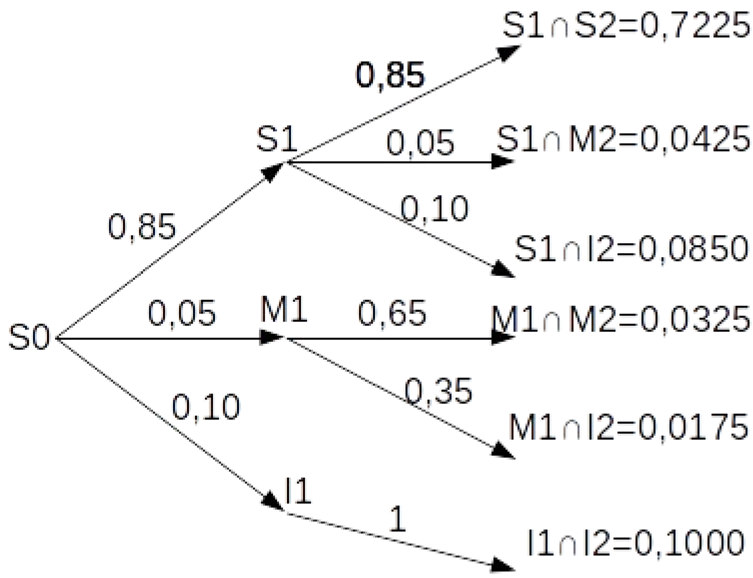
Comme les probabilités M et T sont indépendantes, $P(M\in I \cap T\in J)=P(M\in I)\times P(T\in J)$.

La probabilité que la foudre ait frappé le secteur B3 est $0{,}954\times0{,}819=0{,}781$.

Exercice 4

Partie A

1) Probabilités sur les deux premières semaines :



2) Probabilité totale :

$P(I_2)$ est la somme des probabilités d'arriver à I_2 par 3 chemins possibles :

1) en ayant été susceptible d'être atteint la première semaine S_1
2) en ayant été malade la première semaine M_1
3) en ayant été immunisé dès la première semaine I_1

$P(I_2)=P(S_1\cap I_2)+P(M_1\cap I_2)+P(I_1\cap I_2)$

Que l'on peut écrire : $P(I_2)=P(S_1)P_{S_1}(I_2)+P(M_1)P_{M_1}(I_2)+P(I_1)P_{I_1}(I_2)$

$P(I_2)=0{,}085+0{,}0175+0{,}100=0{,}2025$

3) Probabilité conditionnelle :

$P_{I_2}(M_1)=\dfrac{P(I_2\cap M_1)}{P(I_2)}=\dfrac{0{,}0175}{0{,}2025}=0{,}086$ *(après arrondi au millième)*

Partie B

1) Puisque les individus ne peuvent être que S, M ou I, la somme des probabilités est 1.

2.a) Formule pour la case $C3=v_1=P(M_1)$ (n = 1).

Cases de la ligne 2 :

$\mathrm{A2}=n=0\,;\mathrm{B2}=u_0=P(S_0)=1\,;\mathrm{C2}=v_0=P(M_0)=0\,;\mathrm{D2}=w_0=P(I_0)=0$

Comme nous avons la relation : $v_{n+1}=0{,}65\,v_n+0{,}05\,u_n$

Appliquée à n = 0, elle devient : $v_1=0{,}65\,v_0+0{,}05\,u_0=P(M_1)=\mathrm{C3}$

On remplace v_0 par C2 et u_0 par B2.

Il faut donc écrire la formule : **= 0,65 * C2 + 0,05 * B2** dans la case C3.

2.b) Par lecture dans le tableau : ligne 6 : $n=4$ et $v_4=0{,}086$, le pic épidémique est atteint la semaine 4 pendant laquelle **8,6 %** des individus sont malades.

3.a) Pour qu'un patient soit susceptible d'être atteint, il faut qu'il n'ait jamais été malade ni immunisé. Il a donc dû toujours être susceptible d'être atteint (S)

$S_0=1\,;S_1=0{,}85\,S_0;S_2=0{,}85\,S_1;\ldots$ (S_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

Soit : $u_{n+1}=0{,}85\,u_n$ donc $u_n=u_0 0{,}85^n=0{,}85^n$ car $u_0=P(S_0)=1$.

$u_n=0{,}85^n$

3.b) Démontrons par récurrence que : $v_n=\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)$

1) **Initialisation** : pour n = 0 : $v_0=0$ et $\frac{1}{4}(0{,}85^0-0{,}65^0)=\frac{1}{4}(1-1)=0$

La formule est vraie pour n = 0

2) **Hérédité** :

Supposons que pour une valeur n fixée, la formule est vraie $v_n=\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)$

Nous cherchons à démontrer la formule au rang n+1 : $v_{n+1}=\frac{1}{4}(0{,}85^{n+1}-0{,}65^{n+1})$.

Nous évaluons le membre de gauche v_{n+1} :

Appliquons la relation de récurrence de (v_n) : $v_{n+1}=0{,}65\,v_n+0{,}05\,u_n$

D'une part : le membre de gauche au rang n+1 vaut :

$$v_{n+1}=0{,}65\times\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)+0{,}05\times0{,}85^n$$

$$v_{n+1}=\left(\frac{0{,}65}{4}+0{,}05\right)0{,}85^n-\frac{0{,}65}{4}\,0{,}65^n$$

$$v_{n+1}=0{,}2125\times0{,}85^n-0{,}1625\times0{,}65^n$$

D'autre part : le membre de droite au rang n+1 vaut :

$$\frac{1}{4}(0{,}85^{n+1}-0{,}65^{n+1})=\frac{0{,}85}{4}\,0{,}85^n-\frac{0{,}65}{4}\,0{,}65^n=0{,}2125\times0{,}85^n-0{,}1625\times0{,}65^n$$

Nous avons bien l'égalité : $v_{n+1}=\frac{1}{4}(0{,}85^{n+1}-0{,}65^{n+1})$ au rang n+1.

La relation est héréditaire.

3) Par application du **raisonnement par récurrence**, comme la relation $v_n=\frac{1}{4}(0{,}85^n-0{,}65^n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 0.

4) La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0{,}65<1$: sa **limite est nulle**.

La suite (v_n) est une combinaison linéaire de deux suites géométriques de raisons < 1 : sa **limite est nulle**.

La suite (w_n) **tend vers 1** afin de conserver la relation $u_n+v_n+w_n=1$.

A long terme, **toute la population sera immunisée** contre la maladie.