Baccalauréat 2018 série S, France métropolitaine 22 Juin 2018

Exercice 1

1) La largeur de la chaînette vaut $2x$ (on a supposé $x \geq 0$). Sa hauteur est l'ordonnée du point M soit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2)$. L'égalité entre la hauteur et la largeur équivaut donc à trouver les $x \geq 0$ vérifiant $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) = 2x$, ce qu'on peut re-écrire $e^x + e^{-x} - 2 = 4x$ ou encore $e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$.
Connaissances requises 2^{nde}. *Difficulté : facile.*

2a) Comme on suppose dans cette question que x est non nul, on peut mettre x en facteur dans l'expression $e^x - 4x$ ce qui donne $x(\frac{e^x}{x} - 4)$. $f(x)$ s'écrit alors: $x(\frac{e^x}{x} - 4) + e^{-x} - 2$.
Connaissances requises 4^e. *Difficulté : très facile.*

2b) On sait que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$ et donc $\lim_{x \to +\infty} x(\frac{e^x}{x} - 4) = +\infty$.
D'autre part on sait que $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} - 2 = -2$ et en ajoutant les deux expressions, la première tendant vers l'infini, la deuxième vers une constante, la somme tend vers $+\infty$. En conclusion, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

3a) $f'(x) = e^x + (-1)e^{-x} - 4 = e^x - e^{-x} - 4$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3b) Si x vérifie $f'(x) = 0$, x vérifie donc $e^x - e^{-x} - 4 = 0$. En multipliant cette égalité par e^x on obtient $(e^x)^2 - e^{x-x} - 4e^x = 0 = (e^x)^2 - 1 - 4e^x$ qui est l'égalité demandée.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3c) En notant $X = e^x$, la précédente égalité devient $X^2 - 4X - 1 = 0$. $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$. Les racines du polynôme sont donc :

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = 2 - \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 - \sqrt{5}$$

et

$$X_2 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{4 \times 5}/2 = 2 + \sqrt{5}$$

On cherche donc x tel que $e^x = X_1$ ou bien tel que $e^x = X_2$. La première équation n'a pas de solution car X_1 est négatif alors que l'exponentielle est toujours strictement positive. En effet $\sqrt{5} > \sqrt{4}$ car la fonction racine carrée est croissante, donc $\sqrt{5} > 2$ et donc $X_1 = 2 - \sqrt{5} < 0$. Reste l'équation $e^x = X_2$, donc $ln(e^x) = ln(X_2)$ et donc $x = ln(X_2) = ln(2 - \sqrt{5})$
Connaissances requises 2^{nde} *pour les solutions du polynôme, TS pour la suite. Difficulté : assez facile.*

4a) Le travail est déjà à moitié fait par la donnée du tableau de signe de la dérivée. En 0 on a $f(0) = e^0 + e^0 - 4 \times 0 - 2 = 0$. La limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ car e^x tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Connaissances requises 1^{ere} excepté le calcul de $f(0)$ et la limite en $+\infty$ (TS). Difficulté : très facile.

4b) *Le seul théorème du cours de terminale permettant de justifier l'existence d'une solution unique d'une équation $f(x) = 0$ que l'on ne sait pas résoudre de façon algébrique est le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions monotones. Pas de mystère donc, c'est cela qu'il faut utiliser ici.*

Comme $f(0) = 0$ et que f est strictement décroissante sur $[0; ln(2+\sqrt{5})]$, f ne peut s'annuler que en 0 sur cet intervalle. Comme on cherche une solution strictement positive il faut chercher sur $[ln(2+\sqrt{5}); +\infty[$. De ce qui précède on déduit aussi que $f(ln(2+\sqrt{5})) < 0$. De plus, comme la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$, il existe un réel $x_0 > ln(2+\sqrt{5})$ tel que pour tout $x > x_0$, alors $f(x) > 0$. f ne peut donc s'annuler au delà de x_0 et f change de signe entre $ln(2+\sqrt{5})$ et x_0. Comme sur cet intervalle f est continue (car les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont continues), et qu'elle est de plus monotone, elle s'annule une fois et une seule sur cet intervalle, en un nombre réel qu'on notera α.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5a)

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2.5	2	2.5	0.5
2.25	2.25	2.5	0.25
2.375	2.375	2.5	0.125
2.4375	2.4375	2.5	0.0625

Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

5b) En fin d'algorithme les valeurs de a et b obtenues donnent un encadrement à $0,1$ près du nombre α cherché à la question précédente.

On peut dire que c'était une des rares questions difficiles de ce sujet, car il y a en effet fort à parier que les algorithmes ont été survolés rapidement par beaucoup d'enseignants par manque de temps. Pour autant, la plupart des sujets proposés ces derniers temps contenaient des algorithmes simples de ce type, il n'y avait donc aucune surprise à en trouver un dans cet énoncé.... Ici il s'agissait de reconnaître l'algorithme de résolution d'une équation par dichotomie, algorithme très classique en terminale S.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

6) La solution t de E' vérifie $\dfrac{t}{39} = \alpha$ d'après la question 4, donc $t = 39\alpha$ et la hauteur cherchée valant le double de t, cette hauteur vaut 78α, qui d'après la question 6 est dans l'intervalle $[190,125; 195]$, les nombres étant exprimés en metres.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

Exercice 2

A 1a) L'énoncé indique que 20% de la population a contracté la grippe donc on a $P(G) = 0,2$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 1b)

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0,08 \quad G \\
 & & & \nearrow & \\
 & & 0,4 \quad V & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & 0,92 \quad \bar{G} \\
\nearrow & & & & \\
\searrow & & & & \\
 & & & & p_1 \quad G \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & 0,6 \quad \bar{V} & & \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & p_2 \quad \bar{G}
\end{array}
$$

Remarque: dans cette question on ne demandait même pas p_1 ni p_2 qui sont demandés plus tard.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

A 2) La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée vaut d'après le 1b $0,4 \times 0,08 = 0,032$.
Connaissances requises TS. Difficulté : très facile.

A 3) En lisant l'arbre du 1b on a $P(G) = 0,4 \times 0,08 + 0,6 \times p_1$. Donc on a $0,2 = 0,032 + 0,6 \times p_1$ soit $p_1 = \dfrac{0,168}{0,6} = 0,28$. On en déduit $p_2 = 1 - p_1 = 0,72$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

B 1) Il n'y a que 2 possibilités de résultat à chaque expérience individuelle ; vacciné ou non vacciné. De plus, le fait qu'une personne soit vaccinée est indépendante du fait qu'une autre le soit (ou pas). X suit donc une loi binomiale dont le paramètre est $p = 0,4$
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2a) Calcul de $P(X = 15)$. Je ne pense pas que les correcteurs exigent d'utiliser la formule $P(X = 15) = \binom{40}{15} \times 0,4^{15} \times 0,6^{25} \simeq 0.1228$ environ. Donc direction la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFdP
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 15
Sur une Casio : STAT $\Rightarrow$ DIST $\Rightarrow$ BINM : **BinomialPD(15,40,0.4)**
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 2b) Calcul de $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$. Pour ce calcul, il n'y a pas de formule toute faite à moins de faire à la main la somme de tous les $P(X = k)$ pour k allant de 0 à 19 inclu, donc là encore, pas de scrupule à utiliser la calculatrice. Pour une TI par exemple on tapera :
binomFRep
nbreEssais:40
p: 0,4
valeur de x: 19
Sur une Casio : STAT ⇒ DIST ⇒ BINM : **BinomialCD(19,40,0.4)**
Ce qui donne environ $0,8702$ et donc la probabilité qu'au moins la moitié des personnes soient vaccinées est environ de $1 - 0,8702 = 0,1298$.
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 3) Calcul classique pour se ramener à une loi normale centrée ($\mu = 0$) et réduite ($\sigma = 1$): on écrit que $P(1450 \leq X \leq 1550) = P(\frac{1450 - 1500}{30} \leq \frac{X - 1500}{30} \leq \frac{1550 - 1500}{30}) = P(-\frac{5}{3} \leq Z \leq \frac{5}{3})$. Cette dernière probabilité correspond donc à une loi normale centrée et réduite. Direction donc la TI (ou Casio ou autre) en prenant $\frac{5}{3} \simeq 1,6666$:
normFrep
borne inf: -1,6666
borne sup: 1,6666
μ**:**0
σ**:**1
Sur une Casio : STAT ⇒ DIST ⇒ NORM : **NormCD(-1,6666,1,6666,1,0)**
On obtient alors $P(1450 \leq X \leq 1550) \simeq 0,9044$
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 3

A 1a) La hauteur issue de E est la droite passant par E et perpendiculaire à la face opposée (ABC), il s'agit donc de la droite (EA). La hauteur issue de C est la droite passant par C et perpendiculaire à la face opposée (EAB), il s'agit donc de la droite (BC).
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$. Difficulté : très facile.

A 1b) (BC) et (EA) ne se coupent pas et sont des hauteurs du tétraèdre, donc les 4 hauteurs ne sont pas concourrantes.
Connaissances requises $3^e/2^{nde}$. Difficulté : très facile.

A 2a) Notons $ax + by + cz + d$ l'équation du plan (ACH). Le point $A(0; 0; 0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $d = 0$. Le point $C(1; 1; 0)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $a + b = 0$. Le point $H(0; 1; 1)$ doit vérifier l'équation, ce qui donne $b + c = 0$. Si on choisit de prendre $c = 1$ alors on déduit de l'égalité précédente $b = -c = -1$ puis que $a = -b = 1$. $x - y + z = 0$ est donc bien une équation du plan (ACH).
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne voire facile.

A 2b) On sait que les coefficients a b et c du plan (ACH) donnent les coordonnées d'un vecteur $\vec{n} = (a; b; c)$ perpendiculaire (on dit aussi normal) au plan. D'autre part les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ sont $(1; 0; 1) - (0; 1; 0) = (1; -1; 1)$ qui est justement égal à $\vec{n}$ (si on avait choisi $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ on n'aurait pas égalité mais l'important est qu'ils soient colinéaires). Donc la doite (DF) est bien perpendiculaire au plan (ACH), par conséquent il s'agit bien de la hauteur issue de F du tétraèdre $ACHF$.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne à difficile.

A 2c) La figure représentant un cube, par symétrie de cette figure on a donc que la hauteur issue d'un des sommets du tétraèdre est à chaque fois la grande diagonale du cube issue de ce point, donc (CE) est la hauteur issue de E, (AG) est la hauteur issue de A et (HB) est la hauteur issue de B.
Comme ces hauteurs sont des grandes diagonales du cube, elles se coupent donc toutes au centre du cube et sont donc concourrantes.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

B 1a) (PQ) appartient au plan (NPQ) qui par hypothèse est perpendiculaire à la hauteur (MK), donc (MK) est perpendiculaire à (PQ). Même raisonnement pour (NK) qui est aussi perpendiculaire à (PQ).
Connaissances requises TS. Difficulté : assez facile.

B 1b) Les 2 droites sécantes (par hypothèse) (MK) et (NK) sont distinctes, elles sont donc dans un unique plan (MKN). D'après le 1a, (PQ) est perpendiculaire à ces 2 droites de ce plan (droites qui sont non parallèles) donc (PQ) est perpendiculaire au plan (MKN).
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

B 2) La droite (MN) est dans le plan (MKN) qui, d'après le 1b, est perpendiculaire à (PQ), donc les arêtes [MN] et [PQ] sont bien orthogonales.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

C) On calcule les coordonnées des vecteurs des 6 arêtes. Les arêtes opposées devront être orthogonales (3 couples d'arêtes possibles), ce qu'on peut vérifier en faisant le produit scalaire de ces vecteurs:
$\overrightarrow{\mathrm{RS}}(4; -1; -4)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{TU}}(0; 8; -2)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TU}} = 4 \times 0 + (-1) \times 8 + (-4) \times (-2) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{ST}}(3; -5; 7)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{RU}}(7; 2; 1)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{ST}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RU}} = 3 \times 7 + (-5) \times 2 + 7 \times 1 = 18$

$\overrightarrow{\mathrm{RT}}(7; -6; 3)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{SU}}(3; 3; 5)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{RT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{SU}} = 7 \times 3 + (-6) \times 3 + 3 \times 5 = 18$

Au moins 2 arêtes opposées ne sont pas orthogonales donc le tétraèdre proposé n'est pas orthocentrique.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

Exercice 4

1a) Le module du nombre complexe proposé vaut $r = \left|\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{4}\sqrt{12}$ qui se simplifie en $r = \frac{1}{4}\sqrt{4\times 3} = \frac{2}{4}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour l'argument on doit trouver l'angle θ (modulo 2π) tel que :

$$r\cos(\theta) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$r\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin(\theta) = -\frac{1}{2}$$

On reconnait dans les valeurs d'angles "classiques" l'angle $\theta = -\frac{\pi}{6}$
En conclusion l'expression sous forme exponentielle du nombre complexe est donc :

$$\frac{3-i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$$

1b)
$z_1 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_0 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}\times 8 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}\times 8 = 4\sqrt{3}e^{-i\pi/6}$
$z_2 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}\times 4\sqrt{3}e^{-i\pi/6} = 6e^{-2i\pi/6} = 6e^{-i\pi/3}$
$z_3 = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}\times 6e^{-i\pi/3} = 3\sqrt{3}e^{-i\pi/6-i\pi/3} = 3\sqrt{3}e^{-i\pi/2}$

Montrons que z_3 est imaginaire pur : $e^{-i\pi/2} = \cos(-\pi/2)+i\sin(-\pi/2) = 0+i\times(-1) = -i$ par conséquent $z_3 = -3\sqrt{3}i$ et sa partie imaginaire vaut $-3\sqrt{3}$.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

1c) Pour tracer les points le plus simple est d'utiliser la forme exponentielle de z_0, z_1, z_2 et z_3 en utilisant un raporteur pour tracer la droite entre l'origine et le point considéré, puis en utilisant le module du nombre complexe pour mesurer la distance entre l'origine et le point. On avait donc en résumé $|z_0| = 8$ et $arg(z_0) = 0$, $|z_1| \simeq 6,9$ et $arg(z_1) = -30°$, $|z_2| = 6$ et $arg(z_2) = -60°$, $|z_3| \simeq 5,2$ et $arg(z_3) = -90°$. Sinon à l'aide de la relation $z = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$ où $\theta = arg(z)$, on obtient les coordonnées des points, soit environ $A_0(8;0)$, $A_1(6;-3,5)$, $A_2(3;-5,2)$ et $A_3(0;-5,2)$.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

2a) Pour $n = 0$, $z_0 = 8$ et $8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 e^{-i\frac{\pi}{6}\times 0} = 8$ donc la propriété demandée est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'égalité $z_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{\pi}{6}\times n}$ soit vraie. On sait que $z_{n+1} = \frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_n = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}z_n$.
En utilisant l'hypothèse de récurrence on peut donc remplacer z_n par son expression en fonction de n ce qui donne :

$$z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6} \times 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\frac{\pi}{6}\times n} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{6}\times n-i\pi/6} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} e^{-i\frac{\pi}{6}\times(n+1)}$$

La propriété est donc vraie pour tout n entier naturel.
Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

2b) $u_n = |z_n| = \left|8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-in\frac{\pi}{6}}\right|$
Or on sait que dans l'écriture d'un nombre complexe sous forme exponentielle, le facteur (réel positif) devant l'exponentielle n'est autre que le module de ce nombre complexe. On a donc $u_n = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ le nombre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est plus petit que 1 car $\sqrt{3} < \sqrt{4}$ du fait que la racine carré est une fonction croissante, et donc $\sqrt{3} < 2$ ou encore $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. On sait alors que la suite géométrique $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ tend vers 0 en $+\infty$, donc u_n tend vers 0 en l'infini.
Connaissances requises TS. Difficulté : facile.

3a)

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k e^{-ik\frac{\pi}{6}}}{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} e^{-i(k+1)\frac{\pi}{6}}}$$

Cette expression se simplifie en :

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

On peut alors utiliser la forme algébrique du 2e terme ce qui donne

$$\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})) = 1 - 1 - \frac{i}{\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

Connaissances requises TS. Difficulté : moyenne.

3b) On peut exprimer les longueurs des segments comme étant des modules de nombres complexes, plus précisément on a $A_kA_{k+1} = |z_{k+1} - z_k|$ et $OA_{k+1} = |z_{k+1}|$. D'après le 3a on a

$$\left|\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}\right| = \left|-\frac{i}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc

$$\frac{|z_{k+1}-z_k|}{|z_{k+1}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

On en déduit que $A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$. La longueur de la ligne brisée l_n peut donc s'écrire :

$$l_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(OA_1 + OA_2 + ... + OA_n)$$

Or d'après le 2b on a $OA_k = |z_k| = u_k = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k$ On a donc :

$$l_n = \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$$

La parenthèse contient une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique qui vaut donc en appliquant les formules du cours (attention au fait que la somme commence à $k = 1$ et non à $k = 0$):

$$\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1$$

La limite de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ en plus l'infini vaut 0, comme on l'a mentionné au 2b.
Cette expression tend donc vers :

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

et donc l_n est convergente et a pour limite :

$$\frac{8}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

On peut éventuellement re-écrire cette expression sous une forme plus simple à l'aide de l'expression dite "conjuguée" du dénominateur ce qui donne :

$$\frac{4\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 16 + 8\sqrt{3}$$

On a donc une forme spirale formée d'une infinité de segments, mais sa longueur totale n'est pas infinie.
Connaissances requises TS. Difficulté : difficile.

zeta1859 at gmail, 29/06/2018